სასაზღვრო ამოცანები ელიფსური განტოლებებისათვის

ლიფშიცის საზღვრიან ჰიპერზედაპირებზე

მედეა ცაავა

სადოქტორო ნაშრომი

საქართველოს უნივერსიტეტის მათემატიკის ინსტიტუტი

მეცნიერების და ტექნოლოგიების სკოლა

ხელმძღვანელი: პროფესორი როლანდ დუდუჩავა

თბილისი

2021

სარჩევი

რეზიუმე

პრობლემატიკას, რომელთა დამუშავებას ისახავს მიზნად მოცემული დისერტაცია, ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების გამოკვლევებში.

სადისერტაციო ნაშრომში გამოკვლეულია ჰიპერზედაპირზე მაღალი რიგის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის სხვადასხვა სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნადობის და ერთადერთობა საკითხი როგორც კლასიკური, ასევე არაკლასიკური დასმით. კერძოდ, "ანიზოტროპული"ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებებისათვის გამოკვლეულია როგორც დირიხლეს და ნეიმანის, ასევე შერეული სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა ბესელის პოტენციალთა $\mathbb{H}^1_2(\mathcal{C})$ სივრცეში გლუვ $\mathcal{C}$ ჰიპერზედაპირზე გლუვი $\Gamma = \partial\mathcal{C}$ საზღვრით. დასმული ამოცანების ჩამოსაყალიბებლად გამოყენებული იქნა გიუნტერის წარმოებულები და შესაბამისად ლაპლას-ბელტრამის და ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორი ჩაიწერა მარტივი ფორმით. ამოცანების განხილვისას დამტკიცებული იქნა "შეშფოთებული"ოპერატორის $\mathrm{div}_{\mathcal{S}}(A\nabla_{\mathcal{S}}) + \mathcal{H}\,I \ :\ \mathbb{H}^s_p(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-2}_p(\mathcal{S})$ შებრუნებადობა, სადაც $A(x)$ არის $n \times n$ შემოსაზღვრული ზომადი დადებითად განსაზღვრული მატრიც-ფუნქცია, ხოლო $\mathcal{H}$ წარმოადგენს გლუვ ფუნქციას, აქვს არაუარყოფითი ნამდვილი ნაწილი $\mathrm{Re}\,\mathcal{H}(t) \geqslant 0$ ყველა $t \in \mathcal{S}$-სთვის და $\mathrm{mes\,supp\,Re}\,\mathcal{H} \neq 0$. იგივე შედეგი მიღებულია შეშფოთებული ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორისათვის $\Delta^2_{\mathcal{S}} + \mathcal{H}\,I \ :\ \mathbb{H}^s_p(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-4}_p(\mathcal{S})$. აქ $\mathcal{S}$ წარმოადგენს ჰიპერზედაპირს საზღვრის გარეშე, ხოლო $1 < p < \infty$ და $-\infty < s < \infty$ ნებისმიერია. უფრო მეტიც, $\mathrm{div}_{\mathcal{S}}(A\nabla_{\mathcal{S}})$ და $\Delta^2_{\mathcal{S}}$ ოპერატორებისათვის დამტკიცებულია ფუნდამენტური ამონახსნის არსებობა, რომელიც განმარტებულია როგორც ამ ოპერატორების შებრუნებულები (შებრუნებულების ჰერმანდერის ბირთვები) სივრცეებში $\mathbb{H}^s_{p,\#}(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-2}_{p,\#}(\mathcal{S})$ და, შესაბამისად, $\mathbb{H}^s_{p,\#}(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-4}_{p,\#}(\mathcal{S})$, სადაც $\mathbb{H}^s_{p,\#}(\mathcal{S})$ არის ბესელის პოტენციალთა სივრცის ქვესივრცე და შეიცავს ფუნქციებს, რომელთა საშუალო მნიშვნელობა ნულია. სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნადობის და ერთადერთობის დასამტკიცებლად გამოყენებული იქნა გრინის ფორმულები, კვალების არსებობა და ლაქს-მილგრამის ლემა. ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორისთვის გრინის ფორმულები ჰიპერზედაპირზე ჩაიწერა მარტივად გიუნტერის წარმოებულების საშუალებით. სასაზღვრო ამოცანისათვის მაღალი რიგის კვალების არსებობა დამტკიცებულ იქნა რ. დუდუჩავას მიერ მიღებული კვალების შესახებ ლემის და გრინის ფორმულის გამოყენებით.

არაკლასიკური დასმით განხილვისას გამოკვლეულია როგორც ჩვეულებრივი, ასევე შერეული სასაზღვრო პირობებით ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებებისათვის ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა ბესელის პოტენციალთა $\mathbb{H}^s_p(\mathcal{C})$ და სობოლევ-სლობოდეცკის $\mathbb{W}^s_p(\mathcal{C})$ სივრცეებში გლუვ $\mathcal{C}$ ჰიპერზედაპირზე გლუვი $\Gamma = \partial(\mathcal{C})$ საზღვრით და შერეული სასაზღვრო ამოცანა ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის კუთხოვან $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ არეში α

კუთხით.

სასაზღვრო ამოცანების განხილვისას ერთ-ერთ პრობლემას წარმოადგენდა ფუნდამენტური ამონახსნის არსებობა ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორებისათვის. დამტკიცებულ იქნა ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორის შებრუნებადობა ბესელის პოტენციალთა სივრცეებში კონსტანტების გამოკლებით, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ მოცემულ ოპერატორს აქვს ფუნდამენტური ამოხასნი. ამან მოგვცა საშუალება აგვეგო ნიუტონის და ფენოვანი პოტენციალები და, შესაბამისად, საშუალება მოგვეცა გამოგვეყენებინა პოტენციალთა მეთოდი. შერეული დირიხლე-ნეიმანის სასაზღვრო ამოცანის გამოსაკვლევად ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის ვიყენებთ კვაზი-ლოკალიზაციას და ვღებულობთ მოდელურ სასაზღვრო ამოცანას ლაპლასიანისთვის ნახევარსიბრტყეზე, სიბრტყეზე და კუთხოვან არეზე. მოდელური სასაზღვრო ამოცანა სიბრტყეზე და ნახევარსიბრტყეზე კარგად არის შესწავლილი. მოდელური სასაზღვრო ამოცანა კუთხოვან არეზე გამოკვლეულია პოტენციალთა მეთოდით და დაყვანილია ექვივალენტურ მელინის კონვოლუციის განტოლებათა სისტემაზე სობოლევ-სლობოდეცკის სივრცეში ნახევარღერძზე. სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებები გამოკვლეულია ვ. დიდენკოსა და რ. დუდჩავას მიერ მიღებულ შედეგებზე დაყრდნობით მელინის კონვოლუციის განტოლებების ბესელის პოტენციალთა სივრცეებში ამოხსნადობის შესახებ (იხ. სტატია დიდენკო & დუდუჩავა, 2016 [18]). მიღებული სისტემის სიმბოლო ჩაწერილია ცხადად და უზრუნველჰყოფს ამოხსნადობის და ფრედჰომლურობის თვისებებს, გვაძლევს სისტემის ინდექსის ჩაწერის საშუალებას. სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის კრიტერიუმი არაკლასიკური დასმით მოცემულია ცხადად. ანალოგიურად, სასაზღვრო ამოცანის გამოსაკვლევად ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის გამოყენებულ იქნა კვაზი-ლოკალიზაცია და თავდაპირველი სასაზღვრო ამოცანის გამოკვლევა დავიდა ბი-ლაპლასიანისთვის მოდელური სასაზღვრო ამოცანის გამოკვლევაზე ნახევარსიბრტყეში, რომელიც გამოკვლეულია პოტენციალთა მეთოდით და დაყვანილია ექვივალენტურ კოშის ტიპის განტოლებათა სისტემაზე.

ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის სასაზღვრო ამოცანა გამოკვლეულია არაკლასიკური დასმით α გაშლის მქონე კუთხოვან არეში Ω_α და ამონახსნი იძებნება ბესელის პოტენციალთა $\mathbb{H}^s_p(\Omega_\alpha)$, $s > 1/p$, $1 < p < \infty$ სივრეებში. ამოცანა გამოკვლეულია პოტენციალთა მეთოდის გამოყენებით და დაყვანილია ექვივალენტურ სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე სობოლევ-სლობოდეცკის სივრცეში ნახევრად უსასრულო $\mathbb{W}^{s-1/p}_p(\mathbb{R}^+)$ ღერძზე, სადაც მიღებული განტოლებათა სისტემა არის მელინის კონვოლუციის ტიპის. ისევ გამოყენებულია ვ. დიდენკოსა და რ. დუდჩავას მიერ მიღებული შედეგები მელინის კონვოლუციის განტოლებებისათვის. ნაპოვნი იქნა სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის ცხადი პირობები სობოლევ-სლობოდეცკისა $\mathbb{W}^r_p(\mathbb{R}^+)$ და ბესელის

პოტენციალთა $\mathbb{H}_p^r(\mathbb{R}^+)$ სივრცეებში მთელი r-სათვის, რომელიც გამოყენებულ იქნა ჰელმჰოცის განტოლებისათვის საწყისი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობის, ამონახსნის ერთადერთობის და ფრედჰოლმურობის პირობების დასადგენად ზემოთ აღნიშნული არაკლასიკური დასმით.

საკვანძო სიტყვები: ლაპლას-ბელტრამის განტოლება, ბი-ლაპლას-ბლტრამის განტოლება, მოდელური სასაზღვრო ამოცანები, შერეული სასაზღვრო ამოცანა, ჰელმჰოლცის განტოლება, კუთხოვანი არე, სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებები, ჰიპერზედაპირი, მელინის კონვოლუცია, გიუნტერის წარმოებულები, პოტენციალთა მეთოდი, კვაზილოკალიზაცია, ბესელის პოტენციალთა სივრცეები.

Abstract

The problems, which are considered in the dissertation, have one of the most important place in the investigation of the partial differential equations.

In the dissertation it is investigated solvability and uniqueness of difference boundary value problems for high-order partial differential equations in both classical and non-classical setting on a hypersurface. In particular, it is considered existence and uniqueness of a solution of ordinary and mixed boundary value problems for the "anisotropic"Laplace-Beltrami and bi-Laplace-Beltrami equations in the classical setting in the Bessel Potential $\mathbb{H}^1_2(\mathcal{C})$ space on a smooth $\mathcal{C}$ hypersurface with smooth $\Gamma = \partial\mathcal{C}$ boundary.

For the formulation of boundary value problems, we have used the Gunter's derivatives, which allows to wtite Laplace-Beltrami and bi-Laplce-Beltrami operators in a simple form, respectively. It is proved the invertibility of the perturbed "anisotropic"Laplace-Beltrami operator $\operatorname{div}_{\mathcal{S}}(A\nabla_{\mathcal{S}}) + \mathcal{H}\, I \ : \ \mathbb{H}^s_p(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-2}_p(\mathcal{S})$, where $A(x)$ is an $n \times n$ bounded measurable positive definite matrix function, $\mathcal{H}$ is smooth function, has non-negative real part $\operatorname{Re}\mathcal{H}(t) \geqslant 0$ for all $t \in \mathcal{S}$ and $\operatorname{mes}\operatorname{supp}\operatorname{Re}\mathcal{H} \neq 0$. The same results are obtained for the perturbed bi-Laplace-Beltrami operator $\Delta^2_{\mathcal{S}} + \mathcal{H}\, I \ : \ \mathbb{H}^s_p(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-4}_p(\mathcal{S})$.Here, $\mathcal{S}$ is a hypersurface without boundary for arbitrary $1 < p < \infty$ and $-\infty < s < \infty$. Moreover, the existence of the fundamental solution to the operators $\operatorname{div}_{\mathcal{S}}(A\nabla_{\mathcal{S}})$ and $\Delta^2_{\mathcal{S}}$ are proved, which is interpreted as the invertibility of those operators in the settings $\mathbb{H}^s_{p,\#}(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-2}_{p,\#}(\mathcal{S})$ and $\mathbb{H}^s_{p,\#}(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-4}_{p,\#}(\mathcal{S})$, where $\mathbb{H}^s_{p,\#}(\mathcal{S})$ is a subspace of the Bessel potential space and consists of functions with mean value zero. The unique solvability of the BVP is proved, based upon the Green formulae, Lemma about traces and Lax-Milgram Lemma. Using the Gunter's derivative, Green's formulae were written simply for the bi-Laplace-Beltrami operator on a hypersurface. Existence of the high order traces for the solution of the boundary value problems is proved by using of the Lemma about traces by prof. R. Duduchava and the Green formula.

There are considered existence and uniqueness of the solution of ordinary and mixed boundary value problems for the Laplace-Beltrami and bi-Laplace-Beltrami equiations in the non-classical setting in the Bessel potential $\mathbb{H}^s_p(\mathcal{C})$ and the Sobolev-Slobodečkii $\mathbb{W}^s_p(\mathcal{C})$ spaces on a smooth $\mathcal{C}$ hypersurface with smooth $\Gamma = \partial\mathcal{C}$ boundary and the mixed boundary value problem for the Helmholtz equation in a planar angular domain $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ of magnitude α.

One of the problem we encounter in considering BVPs was the existence of a fundamental solution for the Laplace-Beltrami and bi-Laplace-Beltrami operators. Invertibility of those

operators are proved in Bessel potential spaces with detached constant. The established invertibility implies the existence of the fundamental solution, which can be used to define the Newton and layer potentials and the potential methods, respectively. For the investigation of the mixed Dirichlet-Neumann boundary value problem for the Laplace-Beltrami equation we apply a quasi-localization and obtain the model BVP for the Laplacian. The model mixed BVP on the half plane is investigated by the potential method and is reduced to an equivalent system of Mellin convolution equations in the Sobolev-Slobodečkii space. Boundary integral equations are ivestigated in both the Bessel potential and the Sobolev-Slobodečkii spaces. The symbol of the obtained system is written explicitly and is responsible for the solvability, Fredholm properties and the index of the system. An explicit criterion for the unique solvability of the initial BVP in the non-classical setting is derived as well. Analogously, for the investigation of the boundary value problem for the bi-Laplace-Beltrami equation we apply a quasi-localization and obtain the model BVP for the bi-Laplacian. The model BVP on the half plane is investigated by the potential method and is reduced to an equivalent system of Cauchy type integral equations in the Bessel potential spaces.

The model mixed boundary value problem for the Helmholtz equation is considered in the non-classical setting, where a solution is sought in the Bessel potential spaces $\mathbb{H}^s_p(\Omega_\alpha)$, $s > 1/p$, $1 < p < \infty$. The problem is investigated using the potential method by reducing them to an equivalent boundary integral equation (BIE) in the Sobolev-Slobodečkii space on a semi-infinite axes $\mathbb{W}^{s-1/p}_p(\mathbb{R}^+)$, which is of Mellin convolution type. By applying the recent results on Mellin convolution equations in the Bessel potential spaces obtained by V. Didenko & R. Duduchava in [18], explicit conditions of the unique solvability of this BIE in the Sobolev-Slobodečkii $\mathbb{W}^r_p(\mathbb{R}^+)$ and Bessel potential $\mathbb{H}^r_p(\mathbb{R}^+)$ spaces for arbitrary r are found and used to write explicit conditions for the Fredholm property and unique solvability of the initial model BVPs for the Helmholtz equation in the above mentioned non-classical setting.

წინასიტყვაობა

სადოქტორო დისერტაციაში განხილულია სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნადობა ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებებისათვის კლასიკური და არაკლასიკური დასმით ჰიპერზედაპირზე და სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობა ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის კუთხოვან არეში.

სადოქტორო ნაშრომი მოიცავს შემდეგ თავებს:

- შესავალი
- ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის შერეული სასაზღვრო პირობებით ჰიპერზედაპირზე $\mathbb{H}^1_2(\mathcal{C})$ სივრცეში
- ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის შერეული სასაზღვრო პირობებით ჰიპერზედაპირზე $\mathbb{H}^s_p(\mathcal{C})$ სივრცეში
- ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის სწორკუთხოვან $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ არეში α კუთხით.

შესავალში განხილული იქნება ზოგიერთი კლასიკური შედეგი და ცნობილი ფაქტი, რომელიც მნიშვნელოვანია კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებში და მეტად არსებითია სადოქტორო დისერტაციაში განხილული პრობლემატიკისთვის. ასევე მოყვანილი იქნება დისერტაციაში დამტკიცებული ძირითადი თეორემები და შედეგები და ხაზგასმული იქნება მათი აქტუალობა და სიახლე.

მეორე თავში მოყვანილი იქნება ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორების კლასიკური და გიუნტერის წარმოებულების საშუალებით განმარტებები და აღნიშვნები. ასევე მოყვანილი იქნება ბესელის პოტენციალთა, სობოლევ-სლობოდეცკის სივრცეების და ჰიპერზედაპირის განმარტებები და ფუნდამენტური თეორემები, რომლებიც მეტად არსებითია სადოქტორო დისერტაციაში განხილული შედეგების დასამტკიცებლად. ლაპლას-ბელტრამის და ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებებისათვის მოყვანილი იქნება გრინის ფორმულები, რომლებიც კვალების შესახებ თეორემასთან ერთად გამოიყენება მაღალი რიგის კვალების არსებობის დასამტკიცებლად. ნაჩვენები იქნება ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორების დადებითად განსაზღვრულობა და ამის შემდეგ ლაქს-მილგრამის ლემის გამოყენებით დამტკიცებული იქნება ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა კლასიკური დასმით.

მესამე თავში ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის ამოცანები გამოკვლეული იქნება პოტენციალთა მეთოდით. ფუნდამენტური ამონახსნის საშუალებით ჩაიწერება ნიუტონის და ფენოვანი პოტენციალები.კვაზი-ლოკალიზაციის საშუალებით სასაზღვრო ამოცანები

დაყვანილი იქნება სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე. მოყვანილი იქნება მელინის კონვოლუციისა და კოშის ტიპის სინგულარული ოპერატორების განმარტებები და ფუნდამენტური თეორემები.

მეოთხე თავში ჰელმჰოლცის განტოლებისა გამოკვლეულია სწორკუთხოვან არეში, სადაც ამონახსნი ნაპოვნია ბესელის პოტენციალთა $\mathbb{H}^s_p(\Omega_\alpha)$, $s > 1/p$, $1 < p < \infty$ სივრეებში. ამოცანა გამოკვლეულია პოტენციალთა მეთოდის გამოყენებით და კვაზი-ლოკალიზაციით დაყვანილია ექვივალენტურ სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე სობოლევ-სლობოდეცკის სივრცეში ნახევრად უსასრულო $\mathbb{W}^{s-1/p}_p(\mathbb{R}^+)$ ღერძზე, სადაც მიღებული განტოლებათა სისტემა არის მელინის კონვოლუციის ტიპის. ვ. დიდენკოსა და რ. დუდჩავას მიერ მიღებულ ბესელის პოტენციალთა სივრცეებში მელინის კონვოლუციის განტოლებების უახლესი შედეგების გამოყენებით (იხ. სტატია დიდენკო & დუდუჩავა, 2016, [18]) ნაპოვნი იქნა სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის ერთადერთობის პირობები ცხადად სობოლევ-სლობოდეცკისა $\mathbb{W}^r_p(\mathbb{R}^+)$ და ბესელის პოტენციალთა $\mathbb{H}^r_p(\mathbb{R}^+)$ სივრცეებში მთელი r-სთვის და ჩაწერილი იქნა ფრედჰოლმურობის თვისებების ცხადი პირობები და ჰელმჰოცის განტოლებისათვის საწყისი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობის ერთადერთობა არაკლასიკური დასმით.

სადისერტაციო ნაშრომში გამოყენებულია შემდეგი სტატიები:

- R. Duduchava, M. Tsaava, T. Tsutsunava, "Mixed Boundary Value Problem on Hypersurfaces International Journal of Differential Equations, 2014, 1-8.

- M. Tsaava, "The boundary Value Problems for the Bi-Laplace-Beltrami Equation Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, Vol: 77, 2019, 93-103.

- R. Duducava, M. Tsaava, "Mixed Boundary Value Problems for the Laplace-Beltrami Equation Complex Variables and Elliptic Equations, Vol: 63, 2018, 1468-1496.

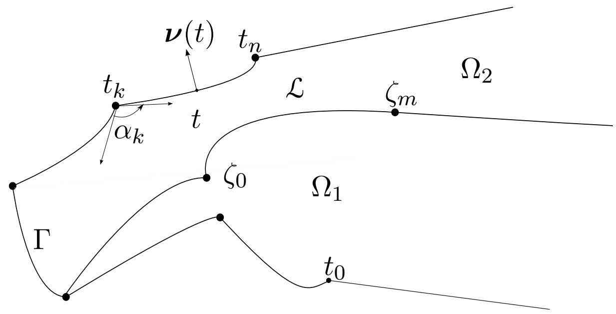
- M. Tsaava, "Bi-Laplace-Beltrami Equation on a Hypersurface Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute, Vol: 173, (2019), 3, 147-157.

- R. Duduchava, M. Tsaava, "Mixed Boundary Value Problems for the Helmholtz Equation in a Model 2D angular Domain Georgian Mathematical Journal, Vol: 27, 2, 2020, 211–231.

- T. Buchukuri, R. Duduchava, D. Kapanadze, M. Tsaava, "Localization of a Helmholtz boun-da-ry value problem in a domain with piecewise-smooth boundary Proceedings of A. Razmadze Mathematical institute, Vol: 162, 37-44, 2013.

1 შესავალი

ბოლო წლებში დიდ ინტერესს იწვევს შემდეგი ამოცანის გამოკვლევა: ვეძებოთ Ω_1 და Ω_2 არეში განმარტებული $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))^\top$ ვექტორ-ფუნქცია



ნახ. 1

რომელიც წარმოადგენს "ანიზოტროპული"ჰელმჰოლცის განტოლების ამონახსნს

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathcal{E}_1 \operatorname{grad} u + k_1^2 u = 0, \quad \Omega_1 - \text{ში}, \\ \operatorname{div} \mathcal{E}_2 \operatorname{grad} u + k_2^2 u = 0, \quad \Omega_2 - \text{ში}, \\ [\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^+ = h \qquad u^+ = g, \quad \Gamma := \partial(\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}) - \text{ზე}, \\ u^-(t) = u^+(t), \qquad [\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^-(t) = [\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^+(t), \quad \mathcal{L} := \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 - \text{ზე}, \end{cases} \tag{1.1}$$

სადაც $\mathcal{E}_1$ არის უარყოფითად განსაზღვრული 3×3 მატრიცი, $\mathcal{E}_2$ არის დადებითად განსაზღვრული 3×3 მატრიცი, $\Gamma = \partial(\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})$ არის $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$ გაერთიანებული არის საზღვარი, ხოლო $\mathcal{L} := \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ არის არეების საერთო საზღვარი (ინტერფეისი), $\boldsymbol{\nu}(t)$ წარმოადგენს ერთეულოვან ნორმალს საზღვრის მიმართ $t \in \Gamma$ წერტილში.

თუ $\mathcal{E}_j = \text{const} = c_j I$, სადაც I არის სამგანზომილებიანი ერთეულოვანი მატრიცი, მაშინ

$$\operatorname{div} \mathcal{E}_j \operatorname{grad} u(x) + k_j^2 u(x) = c_j \Delta\, u(x) + k_j^2 u(x), \qquad \Omega_j \quad \text{არეში},$$

და მივიღებთ "იზოტროპიულ"ჰელმჰოლცის განტოლებას. მაგრამ, თუ $\pm\mathcal{E}_j \neq \text{const}$ არის დადებითად განსაზღვრული მატრიცი, მაშინ არსებობს კვარდატული $\mathcal{E}_j^{1/2}$, $\left(\mathcal{E}_j^{1/2}\right)^2 = \pm\mathcal{E}_j$ ფესვები და ფუნქცია $v(x) := u\left(\mathcal{E}_j^{1/2} x\right)$ არის ჰელმჰოლცის განტოლებათა სისტემის ამონახსნი

$$\Delta\, v(x) - (-1)^j k_j^2 v(x) = 0, \quad \Omega_j^0 \quad \text{არეში}.$$

ბონე-ბენ დია, ჩესნელი, სიარლე, კლეისი, დოჟი და ზოგიერთი სხვა ავტორის (იხ. ბონე-ბენ დია, ჩესნელი & სიარლე, 2012, [3, 4] და იქ ციტირებული ლიტერატურა) ნაშრომებში

დადგენილია (1.1) ტიპის სასაზღვრო ამოცანების სპექტრალური თვისებები. განხილულია შემთხვევები, როდესაც $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ არიან სკალარული, მაგრამ ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქციები და სასაზღვრო პირობები ნულოვანია. მიღებული პირობები საკმარისია და მათ მისაღებად გამოყენებული იქნა ლაქს-მილგრამის ლემის მოდიფიკაცია T-კოერციტიული ოპერატორებისათვის.

(ბუჩუკური, დუდუჩავა, კაპანაძე & ცაავა, 2013, [6]) სტატიაში სასაზღვრო ამოცანის (1.1) ლოკალიზაციის შედეგად მიღებულია 6 მოდელური ამოცანა:

I მოდელური ამოცანა

(1.1) სასაზღვრო ამოცანის ლოკალიზაცია შიდა $t \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ წერტილში წარმოადგენს მოდელურ ამოცანას მთელ $\mathbb{R}^2$-ში.

$$\operatorname{div} \mathcal{E}_j \operatorname{grad} u + k_j^2 u = 0 \qquad \mathbb{R}^2 - \text{ში}, \tag{1.2}$$

სადაც ინდექსი $j = 1, 2$ ფიქსირებულია. კარგად არის ცნობილი, რომ მიღებული დიფერენციალური ოპერატორი $\mathbb{R}_2$-ზე შებრუნებადია და მის შებრუნებულს წარმოადგენს ფუნდამენტური ამონახსნი. ელიფსურობა ამ შემთხვევაში არ გვჭირდება

II მოდელური ამოცანა

(1.1) სასაზღვრო ამოცანის ლოკალიზაცია საზღვრის წერტილში $t \in \Gamma$, რომელიც განსხვავებულია კვანძებისაგან $t \neq t_1, \ldots, t_n$ გვაძლევს მოდელურ ამოცანას ნახევარსიბრტყეში $\mathbb{R}^2_+ := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathcal{E}_j \operatorname{grad} u + k_j^2 u = 0 & \mathbb{R}^2_+ - \text{ში}, \\ a[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^+ - b u^+ = h & \mathbb{R} := \partial \mathbb{R}^2_+ - \text{ზე}, \end{cases} \tag{1.3}$$

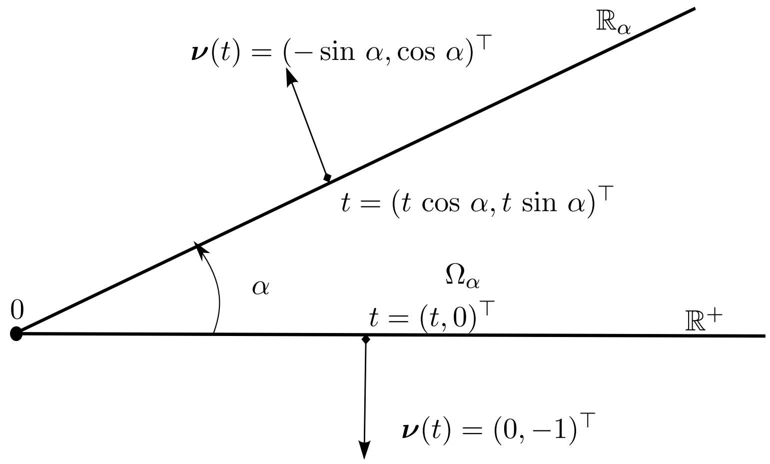
სადაც ინდექსი $j = 1, 2$ ფიქსირებულია, a და b არიან ცნობილი კონსტანტები და $h \in \mathbb{H}^{1/2}(\mathbb{R})$ არის ცნობილი ფუნქცია. ცნობილია, რომ სიმბოლოს ელიფსურობა უზრუნველყოფს (1.3) განტოლების ამოხსნადობას და ამონახსნის ერთადერთობას (ეს არის ნახევარსიბრტყის ამოცანა, იხ. ესკინი, 1981, [39]).

III მოდელური ამოცანა.

(1.1) სასაზღვრო ამოცანის ლოკალიზაცია საზღვრის იმ კვანძში $t = t_k \in \Gamma$,რომელიც არ ეკუთვნის ორი არის გამყოფ საზღვარს $\mathcal{L}$, წარმოადგენს მოდელურ ამოცანას კუთხოვან Ω_α არეში (იხ. ნახ. 2).

$$\begin{cases} \Delta\, u + k^2 u = 0, \quad \Omega_\alpha - \text{ში}, \\ a_\ell [\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^+ - b_\ell u^+ = h, \quad R_\ell - \text{ზე}, \qquad \ell = 1, 2. \end{cases} \tag{1.4}$$

აქ Ω_α წარმოადგენს არეს ორ სხივს $R_1 := \mathbb{R}^+$ და $R_2 := \mathbb{R}_\alpha$ შორის, რომლებიც გამოდიან სათავიდან. მათგან ერთერთი ემთხვევა დადებით ნახევარღერძს $R_1 := \mathbb{R}^+$, ხოლო მეორე $R_2 := \mathbb{R}_\alpha$ მობრუნებულია მისდამი α_k კუთხით.

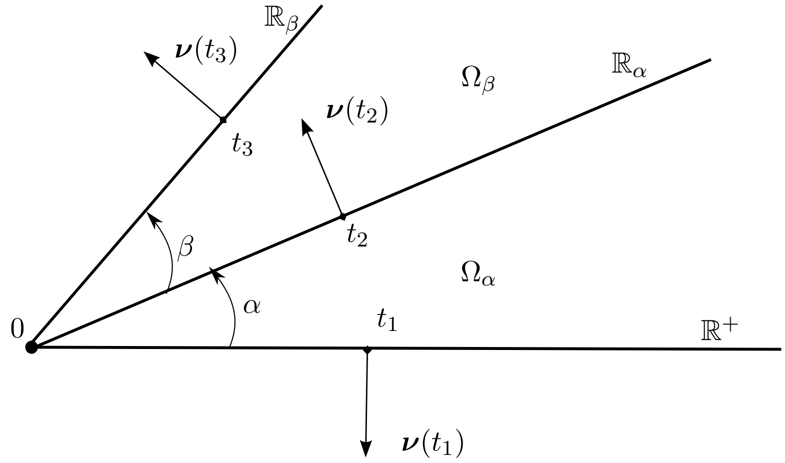


ნახ. 2

IV მოდელური ამოცანა.

(1.1) სასაზღვრო ამოცანის ლოკალიზაცია საზღვრის იმ წერტილში, სადაც Γ საზღვარი ხვდება არეების გამყოფ $\mathcal{L}$ წირს, გვაძლევს მოდელურ ამოცანას არეში 2 კუთხით. (იხ. ნახ.3)

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathcal{E}_1 \operatorname{grad} u + k_1^2 u = 0, \quad \Omega_\beta - \text{ში}, \\ \operatorname{div}\mathcal{E}_2 \operatorname{grad} u + k_2^2 u = 0, \quad \Omega_\alpha - \text{ში}, \\ a_1[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^+ - b_1 u^+ = h, \quad \mathbb{R}^+ - \text{ზე}, \\ a_2[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^+ - b_2 u^+ = h, \quad \mathbb{R}_\beta - \text{ზე}, \\ c_\ell^1[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^+ - d_\ell^1 u^+ = c_\ell^2[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^- - d_\ell^2 u^-, \quad \mathbb{R}_\alpha - \text{ზე}, \quad \ell = 1, 2. \end{cases} \tag{1.5}$$



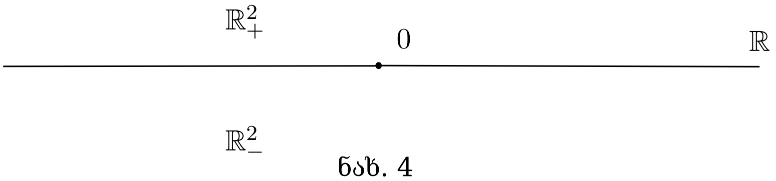
ნახ. 3

V მოდელური ამოცანა.

(1.1) სასაზღვრო ამოცანის ლოკალიზაცია არეების გამყოფი წირის იმ $\mathcal{L} \ni t \neq \zeta_1, \dots, \zeta_m$ წერტილში, რომელიც არ ემთხვევა კვანძს, გვაძლევს მოდელლურ ამოცანას მთელ სიბრტყეში, რომელიც გაყოფილია ნამდვილი ღერძით $\mathbb{R}$ (იხ. ნახ. 4)

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathcal{E}_1 \operatorname{grad} u + k_1^2 u = 0, \quad \mathbb{R}^2_+ := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ - \text{ში}, \\ \operatorname{div} \mathcal{E}_2 \operatorname{grad} u + k_2^2 u = 0, \quad \mathbb{R}^2_- := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^- - \text{ში}, \\ c_\ell^1 [\partial_2 u]^+ - d_\ell^1 u^+ = c_\ell^2 [\partial_2 u]^- - d_\ell^2 u^-, \quad \mathbb{R} - \text{ზე} \quad \ell = 1, 2. \end{cases} \tag{1.6}$$

რადგან $\partial_{\boldsymbol{\nu}} = \partial_2$. ეს ამოცანა არის მარტივად ამოხსნადი.

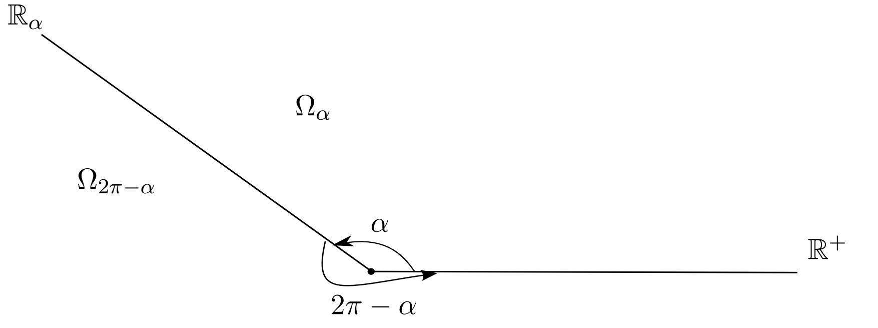


ნახ. 4

VI მოდელური ამოცანა.

(1.1) სასაზღვრო ამოცანის ლოკალიზაცია არეების გამყოფი $\mathcal{L}$ წირის $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ კვანძებში გვაძლევს მოდელლურ ამოცანას Ω_α კუთხოვან არეში და მის პირდაპირ დამატებაში $\Omega_{2\pi-\alpha} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_\alpha}$, რაც წარმოადგენს მთელ სიბრტყეს, გაყოფილს Γ_α კუთხის საზღვრით (იხ. ნახ. 5):

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathcal{E}_1 \operatorname{grad} u + k_1^2 u = 0, \quad \Omega_\alpha - \text{ში}, \\ \operatorname{div} \mathcal{E}_2 \operatorname{grad} u + k_2^2 u = 0, \quad \Omega_{2\pi-\alpha} - \text{ში}, \\ c_\ell^1 [\partial_{\boldsymbol{n} \boldsymbol{u}} u]^+ - d_\ell^1 u^+ = c_\ell^2 [\partial_{\boldsymbol{n} \boldsymbol{u}} u]^- - d_\ell^2 u^-, \quad \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}_\alpha - \text{ზე} \quad \ell = 1, 2. \end{cases} \tag{1.7}$$



ნახ. 5

ვთქვათ, $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ არის ჩაკეტილი ჰიპერზედაპირის $\mathcal{S}$ გლუვი ქვეზედაპირი ევკლიდის სივრცეში $\mathbb{R}^n$ (იხ. § 1) და $\Gamma = \partial\mathcal{C} \neq \emptyset$ არის მისი გლუვი საზღვარი $\partial\mathcal{C} = \Gamma$. ვთქვათ $\mathcal{D}_j := \partial_j - \nu_j\partial_{\boldsymbol{\nu}}$, $j = 1, \dots, n$ არის გიუნტერის მხები წარმოებული და $\boldsymbol{\Delta}_{\mathcal{C}}(t, \mathcal{D}) := \mathcal{D}_1^2 + \cdots + \mathcal{D}_n^2$ არის ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორი შეზღუდული ჰიპერზედაპირზე $\mathcal{C}$ (იხ. დუდუჩავა, 2001, 2009; დუდუჩავა, მიტრეა & მიტრეა, 2006, [22, 32, 23] და §1).

რ. დუდუჩავას სტატიაში [23] განხილული იყო ლაპლას-ბელტრამის სასაზღვრო ამოცანა დირიხლეს სასაზღვრო პირობით

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\Delta}_{\mathcal{C}}(t, \mathcal{D})u)(t) = f(t), & t \in \mathcal{C}, \\ u^+(s) = g(s), & \Gamma - \text{ზე} \end{cases} \tag{1.8}$$

და ნეიმანის სასაზღვრო პირობით

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\Delta}_{\mathcal{C}}(t, \mathcal{D})u)(t) = f(t), & t \in \mathcal{C}, \\ (\mathcal{D}_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} u)^+(s) = h(s), & \Gamma - \text{ზე}, \end{cases} \tag{1.9}$$

სადაც $\boldsymbol{\nu}_\Gamma := (\nu_{\Gamma,1}, \dots, \nu_{\Gamma,n})^\top$ არის Γ საზღვრის ერთეულოვანი ნორმალური ვექტორული ველი, $\mathcal{C}$ ჰიპერზედაპირის მხები და u^+ აღნიშნავენს კვალებს საზღვარზე. წარმოებული

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} := \sum_{k=1}^{n} \nu_{\Gamma,k}\mathcal{D}_k, \qquad s \in \Gamma. \tag{1.10}$$

არის $\mathcal{C}$ ჰიპერზედაპირის მხები და Γ საზღვრის ნორმალი.

(1.8) და (1.9) სასაზღვრო ამოცანები გამოკვლეული იყო (დუდუჩავა, 2009, [23]) სტატიაში შემდეგი კლასიკური

$$f \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}(\mathcal{C}), \qquad g \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma), \qquad h \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma). \tag{1.11}$$

და არაკლასიკური დასმით:

$$f \in \widetilde{\mathbb{H}}^{s-2}_p(\mathcal{C}), \qquad g \in \mathbb{H}^{s-1/p}_p(\Gamma), \qquad h \in \mathbb{H}^{s-1-1/p}_p(\Gamma), \qquad 1 < p < \infty, \quad s > \frac{1}{p}, \tag{1.12}$$

და დამტკიცებული იყო შემდეგი თეორემა

თეორემა 1.1. *დირიხლეს ამოცანას* (1.8), (1.11) *(და* (1.8), (1.12)*) გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი.*

ნეიმანის ამოცანის ამოსახსნელად (1.9), (1.11) *(და* (1.9), (1.12)*) უნდა სრულდებოდეს შემდეგი აუცილებელი და საკმარისი თავსებადობის პირობა*

$$(f, 1)_{\mathcal{C}} - (h, 1)_\Gamma = 0, \tag{1.13}$$

რომელის უზრუნველყოფს ამონახსნის ერთადერთობის არსებობას.

თუ f და h არიან რეგულარულად ინტეგრებადი ფუნქციები, თავსებადობის პირობა (1.13) აკმაყოფილებს შემდეგ ფორმას:

$$\int_{\mathcal{C}} f(y)\, d\sigma - \oint_{\Gamma} h(s) ds = 0. \tag{1.14}$$

ქვემოთ შენიშვნა 2.16 და შენიშვნა 2.17-ში ნაჩვენებია, რომ დირიხლეს სასაზღვრო ამოცანისა (1.8), (1.11) და ნეიმანის სასაზღვრო ამოცანის (1.9), (1.11) ამოხსნადობის ერთადერთობა კლასიკური ფორმულირებით გამომდინარეობს ლაქს-მილგრამის ლემიდან.

(დუდუჩავა, 2009, [23]) სტატიაში გამოკვლევა დაყრდნობილია გიუნტერის წარმოებულების ტექნიკაზე, რომელიც შემოთავაზებულია რ. დუდუჩავას მიერ 2002 წლიდან, მოგვიანებით განვითარებულია (დუდუჩავა, 2006, [32]) სტატიაში და იყენებს პოტენციალთა მეთოდს. მსგავსი ამოცანები, უფრო ადრე $p = 2$-სთვის განსხვავებული მიდგომით გამოკვლეული იყო (მიტრეა & ტეილორი, 2000, [62]) სტატიაში. ბევრი ავტორის მიერ შერეული სასაზღვრო ამოცანები ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის არეში გამოკვლეულია ლაქს-მილგრამის ლემის საშუალებით (მაგ, იხ. ლო-დრე, 2012 [55]).

სტატიაში, რომელიც შესრულებულია პროფ. რ. დუდუჩავასთან და თ. წუწუნავასთან ერთად, გამოკვლეულია სასაზღვრო ამოცანა "ანიზოტროპული"ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის შერეული სასაზღვრო პირობებით

$$\begin{cases} \operatorname{div}_{\mathcal{C}}(A\,\nabla_{\mathcal{C}} u)(t) = f(t), & t \in \mathcal{C}, \\ u^{+}(s) = g(s), & \Gamma_D - \text{ზე}, \\ \langle \boldsymbol{\nu}_{\Gamma}(s), (A\,\nabla_{\mathcal{C}} u)^{+}(s)\rangle = h(s), & \Gamma_N - \text{ზე}, \end{cases} \tag{1.15}$$

სადაც $\partial\mathcal{C} = \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ გაყოფილია ორ ბმულ ნაწილად, $A = \{a_{ij}\}$ არის $n \times n$-ზე მკაცრად დადებითად განსაზღვრული მატრიცი,

$$\langle A(x)\xi, \xi\rangle \geqslant C\|\xi\|^2, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.16}$$

ყველა $x \in \mathcal{C}$-სთვის და დამტკიცებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1.2. *შერეულ სასაზღვრო ამოცანას* (1.15) *კლასიკური დასმით* (1.11) *გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი* $\mathbb{H}^1(\mathcal{C})$ *სივრცეში.*

(1.15) სასაზღვრო ამოცანა განხილულ იქნა კლასიკური დასმით (1.11), ამისათვის გამოყენებულია ლაქს-მილგრამის ლემა და ამოცანის ამოხსნადობის ერთადერთობა დამტკიცებულია უფრო მარტივად მაშინ, როცა არაკლასიკური დასმით (1.12) გამოკვლევა ხდება პოტენციალთა მეთოდის გამოყენებით.

ანალოგიური მეთოდით არის დამტკიცებული ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა ბილაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის ჰიპერზედაპირზე.

ვთქვათ, $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ არის ჩაკეტილი ჰიპერზედაპირის $\mathcal{S}$ გლუვი ქვეზედაპირი ევკლიდის სივრცეში $\mathbb{R}^n$ (იხ. § 1) და $\Gamma = \partial\mathcal{C} \neq \emptyset$ არის მისი საზღვარი. ვთქვათ $\mathcal{D}_j := \partial_j - \nu_j\partial_{\boldsymbol{\nu}}$, $j = 1, \ldots, n$ არის გიუნტერის მხები წარმოებული და $\boldsymbol{\Delta}^2 := \sum_{j,k=1}^{n} \mathcal{D}_j^2\mathcal{D}_k^2$ არის ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორი შეზღუდული $\mathcal{C}$-ზე.

ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლება სასაზღვრო პირობებით ჩაიწერება შემდეგი ფორმით

$$\begin{cases} \Delta_{\mathcal{C}}^2 u(t) = f(t), & t \in \mathcal{C}, \\ (B_0 u)^+(s) = g(s), & \Gamma - \text{ზე}, \\ (B_1 u)^+(s) = h(s), & \Gamma - \text{ზე}, \end{cases} \tag{1.17}$$

სადაც სასაზღვრო პირობები შეიძლება შერჩეულ იქნეს შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} &B_0 = I \quad \text{და} \quad B_1 = \partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}, \quad \text{ან} \qquad B_1 = \Delta_{\mathcal{C}}, \\ &B_0 = \partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \quad \text{და} \quad B_1 = \partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\Delta_{\mathcal{C}}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

სასაზღვრო ამოცანას

$$\begin{cases} \Delta_{\mathcal{C}}^2 u(t) = f(t), & t \in \mathcal{C}, \\ u^+(\tau) = 0, \qquad (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} u)^+(\tau) = 0, & \tau \in \Gamma \end{cases}$$

ეწოდება **ჩამაგრებული ზედაპირის განტოლება** და განხილულია კლასიკური დასმით

$$u \in \mathbb{H}^2(\mathcal{C}), \quad f \in \widetilde{\mathbb{H}}_\Gamma^{-2}(\mathcal{C}).$$

სტეკლოვის სასაზღვრო პირობები:

$$\begin{cases} \Delta_{\mathcal{C}}^2 u(t) = f(t), & t \in \mathcal{C}, \\ u^+(\tau) = g(\tau), \qquad (\Delta_{\mathcal{C}} u)^+ + a\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} u)^+(\tau) = h(\tau), & \tau \in \Gamma \end{cases}$$

კლასიკური დასმით

$$u \in \mathbb{H}^2(\mathcal{C}), \quad f \in \widetilde{\mathbb{H}}_\Gamma^{-2}(\mathcal{C}), \qquad g \in \mathbb{H}^{3/2}(\Gamma), \qquad h \in \mathbb{H}^{-3/2}(\Gamma).$$

აქ a ნამდვილ მნიშვნელობიანი კონსტანტაა.

ნავიერის სასაზღვრო პირობები:

$$\begin{cases} \Delta_{\mathcal{C}}^2 u(t) = f(t), & t \in \mathcal{C}, \\ u^+(\tau) = g(\tau), \qquad (\Delta_{\mathcal{C}} u)^+ = h(\tau), & \tau \in \Gamma \end{cases}$$

კლასიკური დასმით

$$u \in \mathbb{H}^2(\mathcal{C}), \quad f \in \widetilde{\mathbb{H}}_\Gamma^{-2}(\mathcal{C}), \qquad g \in \mathbb{H}^{3/2}(\Gamma), \qquad h \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma).$$

სადოქტორო ნაშრომში ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლება განხილულია ჩვეულებრივი და შერეული სასაზღვრო პირობებით. ჩვეულებრივი სასაზღვრო პირობებით შემდეგი ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლება

$$\begin{cases} \Delta^2 u(t) = f(t), & t \in \mathcal{C}, \\ (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} u)^+(s) = g(s), & \Gamma - \text{ზე}, \\ (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \Delta_{\mathcal{C}} u)^+(s) = h(s), & \Gamma - \text{ზე}, \end{cases} \tag{1.19}$$

განხილულია კლასიკური დასმით

$$u \in \mathbb{H}^2(\mathcal{C}), \quad f \in \widetilde{\mathbb{H}}_\Gamma^{-2}\mathcal{C}), \qquad g \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma), \qquad h \in \mathbb{H}^{-3/2}(\Gamma), \tag{1.20}$$

სადაც

$$\widetilde{\mathbb{H}}_\Gamma^{-2}(\Omega) := \left\{ f \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega) \mid (f, \varphi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0, \quad \varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega) \right\}. \tag{1.21}$$

შენიშვნა 1.3. *მოდით განვიხილოთ პირობა $f \in \widetilde{\mathbb{H}}_\Gamma^{-2}(\mathcal{C})$ in* (1.20).

როგორც (სიაო & ვენდლანდი, 2008, [45]) სტატიაში ნაჩვენები, პირობა $f \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-2}(\mathcal{C})$ არ უზრუნველყოფს (1.19) *სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობის ერთადერთობას. მარჯვენა მხარეს f სჭირდება დამატებით შეზღუდვა, რომ ეკუთვნის ქვესივრცეს $\widetilde{\mathbb{H}}_0^{-2}(\Omega) \subset \widetilde{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega)$ რომელიც არის ორთოგონალური შეზღუდვა ქვესივრცის $\widetilde{\mathbb{H}}_\Gamma^{-2}(\Omega)$ და შედგება დისტრიბუციებისაგან $\widetilde{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega)$-დან, რომლებიც შეყურსულია მხოლოდ არის საზღვარზე $\Gamma = \partial\Omega$ (იხ.* (1.21)*).*

(1.18) სასაზღვრო პირობების სხვა შემთხვევებიც ანალოგიურად განიხილება.

(1.19) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობის ერთადერთობა დამტკიცებულია კლასიკური დასმით (1.20) ლაქს-მილგრამის ლემის გამოყენებით.

ჩვენ ასევე განვიხილავთ სასაზღვრო ამოცანას შემდეგი შერეული სასაზღვრო პირობებით: ვთქვათ $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ არის ჩაკეტილი ჰიპერზედაპირის $\mathcal{S}$ გლუვი ქვეზედაპირი ევკლიდის სივრცეში $\mathbb{R}^n$ (იხ. § 1) და მისი საზღვარი $\partial\mathcal{C} = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \neq \emptyset$ გაყოფილია ორ თანაუკვეთ ნაწილად. განვიხილოთ შერეული სასაზღვრო ამოცანა ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის

$$\begin{cases} \Delta^2 u(t) = f(t), & t \in \mathcal{C}, \\ (u)^+(s) = g_1(s), & \Gamma_1 - \text{ზე}, \\ (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} u)^+(s) = g_2(s), & \Gamma_2 - \text{ზე}, \\ (\Delta_{\mathcal{C}} u)^+(s) = h_1(s), & \Gamma_1 - \text{ზე}, \\ (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \Delta_{\mathcal{C}} u)^+(s) = h_2(s), & \Gamma_2 - \text{ზე}, \end{cases} \tag{1.22}$$

კლასიკური დასმით

$$\begin{gathered} u \in \mathbb{H}^2(\mathcal{C}), \quad f \in \widetilde{\mathbb{H}}_\Gamma^{-2}(\mathcal{C}), \qquad g_1 \in \mathbb{H}^{3/2}(\Gamma_1), \\ g_2 \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_2), \qquad h_1 \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_1), \qquad h_2 \in \mathbb{H}^{-3/2}(\Gamma_2). \end{gathered}$$

შემდეგი თეორემები წარმოადგენენ ძირითად თეორემებს. მათი დამტკიცება აღწერილია §1 პარაგრაფში.

თეორემის ჩამოყალიბებამდე განვიხილოთ ჰილბერტის სივრცე, რომელიც არ შეიცავს კონსტანტებს $\mathbb{H}^2_{\#}(\mathcal{S}) := \mathbb{H}^2(\mathcal{S}) \setminus \{\text{const}\}$. სხვაგვარად $\mathbb{H}^2_{\#}(\mathcal{S})$ სივრცე არის ისეთი ფუნქციების $\varphi \in \mathbb{H}^2(\mathcal{S})$ სივრცე, რომლისთვისაც სრულდება $(\varphi, 1)_{\mathcal{S}} = 0$.

თეორემა 1.4. *სასაზღვრო ამოცანას* (1.19) *კლასიკური დასმით* (1.20) *გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი* $\mathbb{H}^2_{\#}(\mathcal{C})$ *სივრცეში.*

თეორემა 1.5. *შერეული ტიპის სასაზღვრო ამოცანას* (1.22) *კლასიკური დასმით* (1.23) *გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი* $\mathbb{H}^2_{\#}(\mathcal{C})$ *სივრცეში.*

სასაზღვრო ამოცანები ჰიპერზედაპირზე გამოიყენება სხვადასხვა ამოცანებში და აქვთ ბევრი პრაქტიკული გამოყენება. მაგალითისთვის, იხილეთ ჰააკის სტატია [43, §7.2] ზედაპირზე სითბოს გავრცელების შემთხვევაში, არისის სტატია [2, §10] ზედაპირული ნაკადის განტოლებისათვის, სიარლე, 1998 და ანდერსონი & კრუშელი, 1993 [16], [1] სტატიები აინშტაინის განტოლებისთვის, რომელიც აღწერს გრავიტაციულ ველებს ვაკუუმში, თემამი & ციანეს, 1997, სტატია [69] ნავიე-სტოქსის განოტლებებისთვის სფერულ არეზე.

ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორი $\Delta^2 = \Delta \times \Delta$ წარმოადგენს მეოთხე რიგის ოპერატორს. ჰიპერზედაპირზე სასაზღვრო ამოცანები გვხვდება სხვადასხვა სიტუაციებში და გააჩნიათ ბევრი პრაქტიკული გამოყენება. ის გვხვდება წრფივი ელასტიურობის სხვადასხვა ამოცანებში, მაგალითად როდესაც ვეძებთ ფირფიტის მცირე გადაადგილებას, სადაც ლაპლასიანი აღწერს მემბრანის ყოფაქცევას.

$\mathcal{S}$ ჰიპერზედაპირს $\mathbb{R}^n$ ევკლიდის სივრცეში აქვს $(n-1)$-განზომილებიანი რიმანის მრავალსახეობის ბუნებრივი სტრუქტურა და ზემოხსენებულ კერძოწარმებულიან დიფერენციალურ განტოლებებს ჰიპერზედაპირებზე არ გააჩნიათ ზუსტი მსგავსება ბრტყელ ევკლიდური სივრცის არეებზე დასმულ დიფერენციალურ განტოლებებთან, რადგან გასათვალისწინებელია $\mathcal{S}$ ზედაპირისი ისეთი გეომეტრიული მახასიათებლები, როგორიცაა ზედაპირის სიმრუდე. ამის შედეგად კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებები ჩაწერილნი არიან მრავალსახეობის $\mathcal{S}$ სტრუქტურისატვის ბუნებრივ ლოკალურ კოორდინატებში.

პრობლემას, რომელსაც ჩვენ ასევე გადავაწყდებით სასაზღვრო ამოცანების განხილვისას, წარმოადგენს ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორებისათვის ფუნდამენტური ამონახსნის არსებობა. ჰიპერზედაპირზე და ევკლიდის $\mathbb{R}^n$ სივრცეში დიფერენციალურ ოპერატორებს შორის ძირითად განსხვავებას წარმოადგენს ფუნდამენტური ამონახსნის არსებობა: ევკლიდის $\mathbb{R}^n$ სივრცეში ფუნდამენტური ამონახსნი არსებობს ყველა ელიფსური კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური ოპერატორისთვის მუდმივი კოეფიციენტებით, თუ

იგი იგივურად ნულის ტოლი არ არის. ჰიპერზედაპირზე ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორებს არ აქვთ ფუნდამენტური ამონახსნი, რადგან მათ აქვთ არატრივიალური ბირთვი, რომელიც შეიცავს კონსტანტებს ყველა ბესელის პოტენციალთა სივრცეში. შესაბამისად, ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორებს განვიხილავთ ჰილბერტის სივრცეში კონსტანტების გამოკლებით $\Delta_{\mathcal{C}} : \mathbb{H}^s_{\#}(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-2}(\mathcal{S})$ და $\Delta^2_{\mathcal{C}} : \mathbb{H}^{s+2}_{\#}(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-2}(\mathcal{S})$ ყველა $1 < p < \infty$ და $s \in \mathbb{R}$-სთვის და დავამტკიცებთ, რომ არიან შებრუნებადი ოპერატორები. დადგენილი შებრუნებადობა ნიშნავს ფუნდამენტური ამონახსნის არსებობას, რომელიც გამოიყენება ნიუტონის და ფენოვანი პოტენციალების განმარტებისას.

განვიხილოთ სასაზღვრო ამოცანა ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის არაკლასიკური დასმით.

ვთქვათ $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ არის რაიმე გლუვი ჩაკეტილი ორიენტირებული ზედაპირი, რომელიც ესაზღვრება შიგა Ω^+ და გარე $\Omega^- := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^+}$ არეებს. $\mathcal{C}$-თი აღვნიშნოთ $\mathcal{S}$-ს ქვეზედაპირი, რომელსაც აქვს ორი სახე $\mathcal{C}^-$ და $\mathcal{C}^+$ და აქვს იგივე ორიენტაცია, რაც $\mathcal{S}$-ს: $\mathcal{C}^+$ საზღვრავს შიდა არეს Ω^+ და $\mathcal{C}^-$ საზღვრავს გარე არეს Ω^-. $\mathcal{C}$-ს აქვს გლუვი საზღვარი $\Gamma := \partial\mathcal{C}$, რომელიც გაყოფილია ორ ჩაკეტილ ნაწილად $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, თითოეული შეიცავს სასრული რაოდენობა გლუვ თანაუკვეთ წირებს.

ვთქვათ $\boldsymbol{\nu}(\omega) = (\nu_1(\omega), \nu_2(\omega), \nu_3(\omega))^\top$, $\omega \in \overline{\mathcal{C}}$ არის ერთეულოვანი ნორმალური ვექტორული ველი $\mathcal{C}$ ზედაპირზე და $\partial_{\boldsymbol{\nu}} = \sum\limits_{j=1}^{3} \nu_j \partial_j$ არის ნორმალური წარმოებული. განვიხილოთ ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორი $\mathcal{C}$-ზე ჩაწერილი გიუნტერის მხები წარმოებულების ტერმინებით (დეტალურად იხ. დუდუჩავა, 2006, 2009; დუდუჩავა, ცაავა & წუწუნავა, 2014,[32, 23, 36])

$$\Delta_{\mathcal{C}} := \mathcal{D}_1^2 + \mathcal{D}_2^2 + \mathcal{D}_3^2, \qquad \mathcal{D}_j := \partial_j - \nu_j \partial_{\boldsymbol{\nu}}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{1.24}$$

ვთქვათ $\boldsymbol{\nu}_\Gamma(t) = (\nu_{\Gamma,1}(t), \nu_{\Gamma,2}(t), \nu_{\Gamma,3}(t))^\top$, $t \in \Gamma$, არის ერთეულოვანი ნორმალური ვექტორული ველი Γ საზღვარზე, რომელიც არის $\mathcal{C}$ ზედაპირის მხები და მიმართულია ზედაპირის გარეთ. ვთქვათ, $\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} := \sum\limits_{j=1}^{3} \nu_{\Gamma,j} \mathcal{D}_j$ აღნიშნავს შესაბამის ნორმალურ წარმოებულს Γ საზღვარზე.

ჩვენ შევისწავლით შემდეგ შერეულ სასაზღვრო ამოცანას ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის

$$\begin{cases} \Delta_{\mathcal{C}} u(t) = f(t), & t \in \mathcal{C}, \\ u^+(\tau) = g(\tau), & \tau \in \Gamma_D, \\ (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} u)^+(\tau) = h(\tau), & \tau \in \Gamma_N. \end{cases} \tag{1.25}$$

სადაც u^+ და $(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} u)^+$ აღნიშნავენ შესაბამისად დირიხლეს და ნეიმანის კვალებს საზღვარზე.

სასაზღვრო ამოცანისთვის (1.25) გამოყენებული ლაქს-მილგრამის ლემა გვაძლევს შემდეგ შედეგს.

თეორემა 1.6 (თეორემა 14, დუდუჩავა, 2014, [36] და § 5.1, სიაო & ვენდლანდი, 2008[45]). *სასაზღვრო ამოცანას* (1.25) *გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი კლასიკური დასმით:*

$$u \in \mathbb{H}^1(\mathcal{C}), \quad f \in \widetilde{\mathbb{H}}_0^{-1}(\mathcal{C}), \quad g \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_D), \quad h \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_N). \tag{1.26}$$

1.6 თეორემიდან ჩვენ არ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ამონახსნი უწყვეტია. თუკი ჩვენ წარმატებით დავამტკიცეთ, რომ ამონახსნი u ეკუთვნის $\mathbb{H}^1_p(\mathcal{C})$ სივრცეს ზოგიერთი $2 < p < \infty$-სთვის, ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ უფრო მეტიც, u ამონახსნის ჰელდერის აზრით უწყვეტობა. მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ ამონახსნის მაქსიმალური სიგლუვე რათა შევარჩიოთ ოპტიმალური მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდი. ამისათვის ჩვენ გამოვიკვლევთ (1.25) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობის თვისებებს შემდეგი არა-კლასიკური დასმით

$$\begin{gathered} u \in \mathbb{H}^s_p(\mathcal{C}), \quad f \in \widetilde{\mathbb{H}}^{s-2}_p(\mathcal{C}) \cap \widetilde{\mathbb{H}}_0^{-1}(\mathcal{C}), \quad g \in \mathbb{W}^{s-1/p}_p(\Gamma_D), \\ h \in \mathbb{W}^{s-1-1/p}_p(\Gamma_N), \quad 1 < p < \infty, \quad s > \frac{1}{p} \end{gathered} \tag{1.27}$$

და ვიპოვით ამოხსნადობის აუცილებელ და საკმარის პირობას. შევნიშნოთ, რომ შეზღუდვა $s > \dfrac{1}{p}$ არის აუცილებელი u^+ კვალის არსებობისათვის საზღვარზე.

მთავარი თეორემის ჩამოსაყალიბებლად დაგვჭირდება შემდეგი განმარტების მოყვანა.

განსაზღვრება 1.7. *სასაზღვრო ამოცანა* (1.25), (1.27) *არის ფრედჰოლმის, თუ ერთგვაროვან ამოცანას $f = g = h = 0$ გააჩნია წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების სასრული რაოდენობა და სასრული რაოდენობა ორთოგონალური პირობებისა მარჯვენა მხარისთვის f, g, h რაღა არსებობდეს სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობა.*

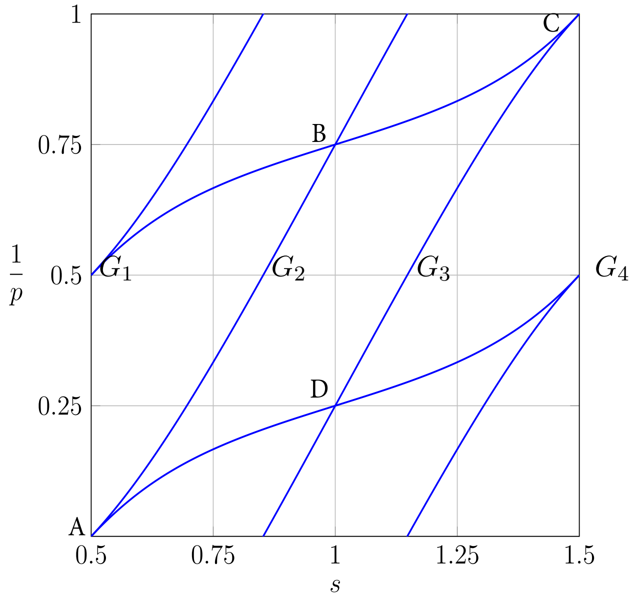
შემდეგი თეორემის დამტკიცება მოყვანილი იქნება დასკვნით ნაწილში § 5.

თეორემა 1.8. *ვთქვათ $1 < p < \infty$, $s > 1/p$. სასაზღვრო ამოცანა* (1.25) *არის ფრედჰოლმის არაკლასიკური დასმით (იხ.* (1.27)*) მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ*

$$\cos^2 \pi s - \left| \sin 2\pi \left(s - \frac{1}{p} \right) \right| \neq 0. \tag{1.28}$$

სხვა სიტყვებით ნახ. 1-ში წირები არ უნდა იკვეთებოდნენ წერტილებში $(s - k, 1/p)$, სადაც $k = 0, 1, \dots$ არის მთელი რიცხვი ისეთი, რომ $\dfrac{1}{2} < s - k \leqslant \dfrac{3}{2}$.

კერძოდ, სასაზღვრო ამოცანას (1.25) *გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი u არაკლასიკური დასმით* (1.27)*, თუ $(s, 1/p)$ წერტილი ეკუთვნის ღია მრუდწირულ ABCD ოთხკუთხედს 1-ელ ფიგურაში.*



ნახ. 1. (1.28) სიმბოლოს გრაფიკი

შენიშვნა 1.9. (1.28)-დან *მივიღებთ, რომ სასაზღვრო ამოცანა* (1.25) *არის ფრედჰოლმის* $p=2$*-სთვის (იხ. წერტილები* G_1, G_2, G_3, G_4 *1-ელ ფიგურაზე) თუ:*

$$s \notin \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots\right\} + \left\{0, \pi - \frac{\arctan 2}{\pi}, \frac{\arctan 2}{\pi}\right\}.$$

წინამდებარე თეორემის 1.8 დამტკიცება ეფუძნება თეორემა 1.10-ს და თეორემა 1.11-ს.

თეორემა 1.10. *ვთქვათ* (1.27) *პირობები სრულდება,* $g_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1/p}(\Gamma)$*,* $h_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\Gamma)$ *არიან სასზღვრო მნიშვნელობების* $g \in \mathbb{W}_p^{s-1/p}(\Gamma_D)$ *და* $h \in \mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\Gamma_N)$ *რაიმე ფიქსირებული გაგრძელებები შესაბამისად (არაკლასიკური ფორმულირება), თავიდან განსაზღვრულნი* $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ *საზღვრის ნაწილებზე:*

a. მაშინ სასაზღვრო ამოცანის (1.25) *ამონახსნი წარმოიდგინება ფორმულით*

$$u(x) = \boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} f(x) + \boldsymbol{W}_{\Gamma}(g_0 + \varphi_0)(x) - \boldsymbol{V}_{\Gamma}(h_0 + \psi_0)(x), \qquad x \in \mathcal{C}. \tag{1.29}$$

აქ $\boldsymbol{N}_{\mathcal{C}}$*,* $\boldsymbol{W}_{\Gamma}$ *და* $\boldsymbol{V}_{\Gamma}$ *არიან ნიუტონის, ორმაგი და მარტივი ფენის პოტენციალები, განმარტებულნი ქვემოთ* (*იხ.* (3.78)) *და* φ_0*,* ψ_0 (1.29)*-ში წარმოადგენენ შემდეგი სასაზღვრო ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებს*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\varphi_0 - r_N \boldsymbol{W}_{\Gamma,0}\varphi_0 + r_N \boldsymbol{V}_{\Gamma,-1}\psi_0 = G_0 & \Gamma_N - \text{ზე}, \\ \dfrac{1}{2}\psi_0 + r_D \boldsymbol{W}^*_{\Gamma,0}\psi_0 - r_D \boldsymbol{V}_{\Gamma,+1}\varphi_0 = H_0 & \Gamma_D - \text{ზე}, \end{cases} \tag{1.30}$$

$$\varphi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}{}_p^r(\Gamma_N), \quad \psi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}{}_p^{r-1}(\Gamma_D), \quad G_0 \in \mathbb{W}_p^r(\Gamma_N), \quad H_0 \in \mathbb{W}_p^{r-1}(\Gamma_D), \tag{1.31}$$

სადაც $r = s - 1/p$ და G_0 და H_0 არიან f, g_0 და h_0 ტერმინებით მოცემული ფუნქციები (3.86)-*ში* § *3.3 ქვეთავში.*

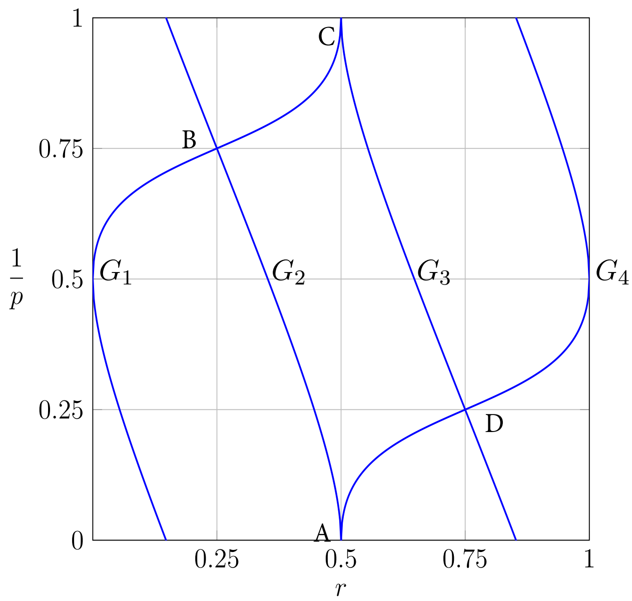
b. *პირიქითაც: თუ u არის სასაზღვრო ამოცანის* (1.25) *ამონახსნი* (1.27) *დასმით, მაშინ $\varphi_0 := r_{\Gamma_D}(u^+ - g_0)$, $\psi_0 := r_{\Gamma_N}((\partial_{\boldsymbol{\nu}} u)^+ - h_0)$ არიან* (1.30) *სისტემის ამონახსნები.*

c. (1.30) *განტოლებათა სისტემას გააჩნია ამონახსნთა ერთადერთი $\varphi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}^{1/2}(\Gamma_N)$ და $\psi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}^{-1/2}(\Gamma_D)$ წყვილი კლასიკური დასმით $p = 2$, $s = 1$-სთვის.*

თეორემის 1.10 დამტკიცება მოყვანილია § 2-ში.

სასაზღვრო ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას (1.30) განვიხილავთ ასევე ბესელის პოტენციალთა სივრცეში

$$\varphi_0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^r_p(\Gamma_N), \quad \psi_0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^{r-1}_p(\Gamma_D), \quad G_0 \in \mathbb{H}^r_p(\Gamma_N), \quad H_0 \in \mathbb{H}^{r-1}_p(\Gamma_D) \tag{1.32}$$



ნახ. 2. (1.33) განტოლების ამოხახსნი

(1.30) სისტემისთვის ჩვენ დავამტკიცებთ შემდეგ შედეგს.

თეორემა 1.11. *ვთქვათ $1 < p < \infty$, $r > -1$. სასაზღვრო ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა* (1.30) *არის ფრედჰოლმის სობოლევ-სლობოდეცკის* (1.31) *და ბესელის პოტენციალთა* (1.32) *სივრცეში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ*

$$\cos^2 \pi \left(\frac{1}{p} + r \right) - |\sin 2\pi r| \neq 0 \tag{1.33}$$

სხვა სიტყვებით მე-2 ფიგურაში წირები არ უნდა კვეთდნენ $(r - k, 1/p)$ წერტილში, სადაც $k = 0, 1, \ldots$ მთელი რიცხვი ისეთი, რომ $0 < r - k \leqslant 1$.

კერძოდ, სისტემას (1.30) *გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი* (1.31)*-არაკლასიკური დასნით და* (1.32) *თუ წერტილი* $(r, 1/p)$ *ეკუთვნის ღია მრუდწირულ ABCD ოთხკუთხედს მე-2 ფიგურაში.*

შენიშვნა 1.12. (1.33)*-დან გამომდინარეობს, რომ სასაზღვრო ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა* (1.30) *არის ფრედჰოლმის* $p = 2$*-სთვის, თუ (იხ. წერტილები* G_1, G_2, G_3, G_4 *ნახ. 2-ზე):*

$$r \notin \{0, 1, \dots\} + \left\{0, \pi - \frac{\arctan 2}{\pi}, \frac{\arctan 2}{\pi}\right\}.$$

წინამდებარე თეორემის 1.11 დამტკიცება ეყრდნობა დამხმარე თეორემას 1.10. თეორემის ჩამოსაყალიბებლად განვიხილოთ შემდეგი მოდელური სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემა შემდეგი პირობებით:

$$\begin{cases} \varphi(t) + \boldsymbol{K}^1_{-1}\psi(t) = G(t), \\ \\ \psi(t) + \boldsymbol{K}^1_{-1}\varphi(t) = H(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{1.34}$$

სობოლევ-სლობოდეცკის

$$\varphi, \psi \in \widetilde{\mathbb{W}}^{r-1}_p(\mathbb{R}^+), \qquad G, H \in \mathbb{W}^{r-1}_p(\mathbb{R}^+) \tag{1.35a}$$

და ბესელის პოტენციალთა სივრცეში

$$\varphi, \psi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{r-1}_p(\mathbb{R}^+), \qquad G, H \in \mathbb{H}^{r-1}_p(\mathbb{R}^+). \tag{1.35b}$$

აქ

$$\boldsymbol{K}^1_c v(t) := \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{v(\tau)d\tau}{t - c\tau}, \qquad 0 < \arg c < 2\pi, \quad v \in \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+) \tag{1.36}$$

წარმოადგენს მელინის კონვოლუციის ოპერატორს -1 რიგის ერთგვაროვანი ბირთვით (იხ. დუდუჩავა, 1979, 1982, 1984, 1986, [25, 20, 27, 26]) და შემოსაზღვრულია ბესელის პოტენციალთა და სობოლევ-სლობოდეცკის სივრცეებში (იხ. წინადადება 3.35).

თეორემა 1.13. *ვთქვათ* $1 < p < \infty$, $r = s - \dfrac{1}{p} > -1$.

სასაზღვრო ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა (1.30) *არის ფრედჰოლმის სობოლევ-სლობოდეცკის* (1.31) *და ბესელის პოტენციალთა* (1.32) *სივრცეში თუ სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემა* (1.34) *არის ლოკალურად შებრუნებადი* 0*-ში შემდეგ პირობებში* (1.35a) *და* (1.35b)*, შესაბამისად.*

შენიშვნა 1.14. *თეორემა 1.13 დამტკიცებულია § 3.3 ქვეთავში. დამტკიცებისთვის ჩვენ გამოვიყენებთ სასაზღვრო ამოცანის* (1.25) *კვაზი-ლოკალიზაციას შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანისათვის ნახევარ სიბრტყეზე (იხ. ლემა 3.23 და ლემა 3.24). შეზღუდვა* $r > -1$ *არის ბუნებრივი, ვინაიდან ჩვენ საქმე გვაქვს სასაზღვრო ამოცანასთან.*

შესაბამისად, თეორემა 1.11 სამართლიანია ყველა $r \in \mathbb{R}$-სთვის და პირობა (1.28) *აკმაყოფილებს ფორმას: ან $p \neq 2$ ან $p = 2$ და $r \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.*

კვაზი-ლოკალიზაცია გულისხმობს "კოეფიციენტის გაყინვას"და მოცემული კონტურისა და ზედაპირის "გასწორებას". დეტალებისთვის კვაზი-ლოკალიზაციასთან დაკავშირებით იხილეთ სტატიები სიმონენკო, 1965, [67] და კასტრო, დუდუჩავა & შპეკი, 2003, [7], სადაც კვაზი-ლოკალიზაცია კარგად არის აღწერილი სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორებისთვის და სასაზღვრო ამოცანებისთვის შესაბამისად. ჩვენ ასევე გირჩევთ დუდუჩავას სტატიას [30, § 3], სადაც კვაზი-ლოკალიზაციის მოკლე აღწერა არის მოცემული.

მოცემულ სტატიაში შერეული სასაზღვრო ამოცანის (1.25) ლოკალიზებით ჩვენ ვღებულობთ 3 განსხვავებულ მოდელურ ამოცანას:

1 ლოკალიზაცია $\mathcal{C}$-ს ზედაპირის შიგა წერტილებში.

2 ლოკალიზაცია Γ_D და Γ_N საზღვრის შიგა წერტილებში.

3 ლოკალიზაცია Γ საზღვრის წერტილებზე, სადაც განსხვავებული სასაზღვრო პირობები ერთმანეთს ეჯახება (Γ_N და Γ_D საზღვრის ბოლოებში).

კვაზი-ლოკალიზაციით მიღებული მოდელური სასაზღვრო ამოცანა პირველ და მეორე შემთხვევაში კარგად გამოიკვლევა და ასეთ მოდელურ ამოცანებს აქვთ ერთადერთი ამონახსნი დამატებითი პირობების გარეშე. მესამე შემთხვევაში ჩვენ ვღებულობთ შერეულ სასაზღვრო ამოცანას ნახევარ სივრცეზე ლაპლასის განტოლებისათვის (იხ. (3.90) ქვემოთ). სისტემა (1.34) შეესაბამება მოდელურ შერეულ ამოცანას (3.90) ისე, როგორც სასაზღვრო ამოცანა (1.25) შეესაბამება სისტემას (1.30) (იხ. ლემა 3.24 ქვემოთ).

სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის (1.34) გამოკვლევა ეყრდნობა უახლეს შედეგებს მელინის კონვოლუციის ოპერატორებზე ბესელის პოტენციალთა სივრცეებში (იხ. რ. დუდუჩავა, 2015, [30], დუდუჩავა & დიდენკო, 2016, [18]).

(1.34) სისტემის სიმბოლო $\mathcal{B}^s_0(\omega)$ არის უსასრულო მართკუთხედზე $\mathfrak{R}$ უწყვეტი ფუნქცია და განაპირობებს სისტემის ფრედჰოლმურობის თვისებებს და ინდექსს. ეს უზრუნველყოფს (1.34) სისტემის ფრედჰოლმურობისთვის აუცილებელ და საკმარის პირობებს, რომელიც შემდგომ გამოიყენება თავდაპირველი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობისთვის არაკლასიკური დასმით.

დირიხლეს, ნეიმანის, შერეული და იმპედანსის სასაზღვრო პირობებით ჰელმჰოლცის და სხვა ელიპსური განტოლებების ამოხსნადობის ღრმა ანალიზი ძალიან სასარგებლოა ელიფსური სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის თვისებების შესასწავლად კონუსურ არეებში (იხილეთ კაპანაძე & შულცე, 2003; კოზლოვი, მაზია & როსმანი, 2001; ნობლი, 1958, [46, 49, 64]). ერჰარდტი, ნორასკო & შპეკის სტატიებში [37, 38] ავტორები გვთავაზობენ სხვა მიდგომას ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის მოდელური შერეული ამოცანის გამოსაკვლევად ამონასხნის

ცხადი სახით წარმოდგენის ფორმულის გამოყენებით ორი სხვადასხვა ფორმით, მაგრამ მხოლოდ კლასიკური დასმით (შემთხვევა $p = 2$) და მიღებული მიდგომის გამოყენება შეუძლებელია არაკლასიკური ფორმულირების შემთხვევაში. სხვა ცნობილი შედეგები არიან ან ძალიან მორგებული სპეციფიურ შემთხვევებზე, როგორიცაა მართკუთხედის შემთხვევა (კასტრო, შპეკი & ტეიშერა, 2004, 2006; მეისტერი, პენზელი, შპეკი & ტეხეირა, 1993, [13, 14, 61]) ან გამოიყენება ძალზედ რთული ანალიზური მეთოდები (კომეჩი, მაუზერი & მერზონი, 2005; ჟევანდროვი & მერზონი, 2000 [47, 75]), ან კიდევ ამოცანები ფუნქციონალურ სივრცეებში განიხილება ზუსტი მითითების გარეშე (იხ. მაგ., უფიმცევი, 2003; მალიუჟინეცი, 1959, [57, 72]). ისტორიული მიმოხილვისათვის და შემდგომი ციტირებისათვის მკითხველს ვურჩევთ მიმართოს ნაშრომებს (ჟევანდროვი & მერზონი, 2000; ვასილევი, 2000, [10, 75, 73]).

არსებობს ასევე სხვა მიდგომა, როგორიც არის მაგალითად ზღვრული შთანთქმის პრინციპი. ის დაფუძნებულია ვარიაციულ ფორმულირებაზე, ლაქს-მილგრამის ლემასა და მის განზოგადებაზე. ასეთი მიდგომა გამოყენებულია მაგ. შემდეგ სტატიებში ბონე-ბენ დია & ტილექინი, 2001; ბონე-ბენ დია, 2012, [5, 3, 4]. მაგრამ კვლავ ეს შედეგი მიღებულია კლასიკური დასმის შემთხვევაში.

1960-იანებში შემოთავაზებული იყო კანონიკური დიფრაქციული ამოცანის ამოხსნა სობოლევის სივრცეში, დაფუძნებული ბოლოდროინდელ მიღებულ შედეგებზე ფსევდოდიფერენციალური განტოლებებისათვის კუთხოვან არეებში და უფრო ზოგადად, არეებში ლიფშიცის საზღვრით. ეს გახდა პოპულარული მეისტერის [58, 59], მეისტერისა & შპეკის [60], ვენდლანდი, შტეფანი & სიაოს [74], დუშ-სანტუში & ტეხეირას [66] და მათი თანამშრომლების მიერ 1980-იან წლებში. აგრეთვე იხილეთ ვასილევის წიგნი [73] ციტირებათა გრძელი ნუსხით. შედეგები ასევე შემოიფარგლება კლასიკური დასმით.

განვიხილოთ სასაზღვრო ამოცანა ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის არაკლასიკური დასმით.

ვთქვათ $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ არის რაიმე გლუვი ჩაკეტილი მიმართული ზედაპირი, შემოსაზღვრული კომპაქტური შიდა Ω^+ და გარე $\Omega^- := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^+}$ არით. $\mathcal{C}$-თი აღვნიშნოთ $\mathcal{S}$-ის ქვეზედაპირი, რომელსაც აქვს ორი სახე $\mathcal{C}^-$ და $\mathcal{C}^+$ და მიმართულებას ინარჩუნებს $\mathcal{S}$-დან. $\mathcal{C}^+$ წარმოადგენს შიგა Ω^+ არის საზღვარს და $\mathcal{C}^-$ წარმოადგენს გარე Ω^- არის საზღვარს. $\mathcal{C}$-ს აქვს გლუვი საზღვარი $\Gamma := \partial\mathcal{C}$.

ვთქვათ $\boldsymbol{\nu}(\omega) = (\nu_1(\omega), \nu_2(\omega), \nu_3(\omega))^\top$, $\omega \in \overline{\mathcal{C}}$ არის $\mathcal{C}$ ზედაპირზე მოცემული ერთეულოვანი ნორმალური ვექტორული ველი და $\partial_{\boldsymbol{\nu}} = \sum_{j=1}^{3} \nu_j \partial_j$ არის ნორმალური წარმოებული. $\mathcal{C}$ ზედაპირზე განვიხილოთ ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორი, რომელიც ჩაწერილია გიუნტერის მხები

წარმოებულების საშუალებით (იხ. დუდუჩავა 2006, 2009, 2014, [32, 23, 36])

$$\Delta_{\mathcal{C}}^2 := \sum_{j,k=1}^{3} \mathcal{D}_j^2\mathcal{D}_k^2, \qquad \mathcal{D}_j := \partial_j - \nu_j\partial_{\boldsymbol{\nu}}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{1.37}$$

ვთქვათ, $\boldsymbol{\nu}_\Gamma(t) = (\nu_{\Gamma,1}(t), \nu_{\Gamma,2}(t), \nu_{\Gamma,3}(t))^\top$, $t \in \Gamma$, არის Γ საზღვარზე მოცემული ერთეულოვანი ნორმალური ვექტორული ველი, რომელიც ამავე დროს არის $\mathcal{C}$ ზედაპირის მხები და მიმართულია ზედაპირის გარეთ. ვთქვათ $\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} := \sum_{j=1}^{3} \nu_{\Gamma,j}\mathcal{D}_j$ წარმოადგენს შესაბამის ნორმალურ წარმოებულს Γ საზღვარზე.

შევისწავლეთ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის

$$\begin{cases} \Delta_{\mathcal{C}}^2 u(t) = f(t), & t \in \mathcal{C}, \\ u^+(s) = g(s), & \Gamma - \text{ზე}, \\ (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} u)^+(s) = h(s), & \Gamma - \text{ზე}, \end{cases} \tag{1.38}$$

სადაც u^+ და $(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} u)^+$ აღნიშნავენ კვალებს საზღვარზე.

ჩვენ გვჭირდება ბესელის პოტენციალთა $\mathbb{H}_p^s(\mathcal{S})$, $\mathbb{H}_p^s(\mathcal{C})$, $\widetilde{\mathbb{H}}_p^s(\mathcal{C})$ და სობოლევ-სლობოდეცკის $\mathbb{W}_p^s(\mathcal{S})$, $\mathbb{W}_p^s(\mathcal{C})$, $\widetilde{\mathbb{W}}_p^s(\mathcal{C})$ სივრცეები, სადაც $\mathcal{S}$ არის ჩაკეტილი გლუვი ზედაპირი (საზღვრის გარეშე), რომელიც შეიცავს $\mathcal{C}$-ს როგორც ქვეზედაპირს, $1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$.

სივრცეები $\mathbb{H}_p^s(\mathcal{S})$ და $\mathbb{W}_p^s(\mathcal{S})$ ზოგადად განმარტებულია ერთეულის დაშლით $\{\psi_j\}_{j=1}^{\ell}$, რომელიც დამოკიდებულია $\mathcal{S}$ ზედაპირის რაიმე $\{Y_j\}_{j=1}^{\ell}$ დაფარვაზე და ლოკალურ კოორდინატთა დიფეომორფიზმებზე (დეტალურად იხილეთ ტრიბელი, 1995; სიაო & ვენდლანდი, 2008, [70, 45])

$$\varkappa_j : X_j \to Y_j, \qquad X_j \subset \mathbb{R}^2, \quad j = 1, \dots, \ell.$$

$\mathbb{W}_p^s(\mathcal{S})$ სივრცე ემთხვევა კვალების $\mathbb{H}_p^{s+\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^3)$ სივრცეს $\mathcal{S}$ ზედაპირზე და ცნობილია, რომ $\mathbb{W}^s(\mathcal{S}) = \mathbb{H}^s(\mathcal{S})$ $s \geq 0$-სთვის, $1 < p < \infty$ (იხ. ტრიბელი, 1995, [70]).

ჩვენ ჩვეულებრივ გამოვიყენებთ $\mathbb{H}^s(\mathcal{S})$ და $\mathbb{W}^s(\mathcal{S})$ აღნიშვნებს $\mathbb{H}_2^s(\mathcal{S})$ და $\mathbb{W}_2^s(\mathcal{S})$ სივრცეებისთვის (შემთხვევა, როცა $p = 2$).

$\widetilde{\mathbb{H}}_p^s(\mathcal{C})$ სივრცე განმარტებულია როგორც $\mathbb{H}_p^s(\mathcal{S})$ სივრცის ქვესივრცე, რომელიც შეიცავს ისეთ ფუნქციებს $\varphi \in \mathbb{H}_p^s(\mathcal{S})$, რომელთა სუპორტიც მდებარეობს ჩაკეტილ ქვეზედაპირზე $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{\mathcal{C}}$, სადაც $\mathbb{H}_p^s(\mathcal{C})$ აღნიშნავს ფაქტორ-სივრცეს $\mathbb{H}_p^s(\mathcal{C}) := \mathbb{H}_p^s(\mathcal{S}) \big/ \widetilde{\mathbb{H}}_p^s(\mathcal{C}^c)$, და $\mathcal{C}^c := \mathcal{S} \setminus \overline{\mathcal{C}}$ არის დამატებითი ქვეზედაპირი. $s > 1/p - 1$-სთვის სივრცე $\mathbb{H}_p^s(\mathcal{C})$ შეიძლება გავაიგივოთ ისეთი დისტრიბუციების φ სივრცესთან $\mathcal{C}$ ზედაპირზე, რომელიც უშვებს გაგრძელებას $\ell\varphi \in \mathbb{H}_p^s(\mathcal{S})$, ხოლო $\mathbb{H}_p^s(\mathcal{C})$ გაიგივებულია $r_{\mathcal{C}}\mathbb{H}_p^s(\mathcal{S})$ სივრცესთან, სადაც $r_{\mathcal{C}}$ წარმმოადგენს $\mathcal{C}$ ქვეზედაპირის შეზღუდვას $\mathcal{S}$ ზედაპირზე.

$s < 0$-სთვის, სივრცე განიმარტება დუალობით, ე.ი. $\mathbb{H}_p^s(\mathcal{C}) = (\widetilde{\mathbb{H}}_q^{-s}(\mathcal{C}))'$, სადაც $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. $\widetilde{\mathbb{W}}_p^s(\mathcal{C})$ და $\mathbb{W}_p^s(\mathcal{C})$ სივრცეებიც მსგავსად განიმარტება.

ბესელის პოტენციალთა $\mathbb{H}^s_p(\Gamma)$, $\mathbb{H}^s_p(\Gamma_0)$, $\widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\Gamma_0)$ და სობოლევ-სლობოდეცკის $\mathbb{W}^s_p(\Gamma)$, $\mathbb{W}^s_p(\Gamma_0)$, $\widetilde{\mathbb{W}}^s_p(\Gamma_0)$ სივრცეები ჩაკეტილ Γ კონტურზე და ღია Γ_0 არეზე მსგავსად განიმარტება.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, მთელი $m = 1, 2, \ldots$-სთვის ბესელის პოტენციალთა $\mathbb{H}^m_p(\mathcal{S})$ და სობოლევის $\mathbb{W}^m_p(\mathcal{S})$ სივრცეები ერთმანეთს ემთხვევა და ექვივალენტური ნორმები ორივე სივრცეში განმარტებულია გიუნტერის წარმოებულების საშუალებით (იხ. დუდუჩავა 2001, 2006, 2009, [22, 23, 32] და იხ. (1.37) გიუნტერის წარმოებულებისათვის $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$):

$$||u\big|\mathbb{W}^m_p(\mathcal{S})|| := \left[\sum_{|\alpha|\leqslant m} ||\mathcal{D}^\alpha u\big|L_p(\mathcal{S})||^p\right]^{\frac{1}{p}}, \quad \text{სადაც} \quad \mathcal{D}^\alpha := \mathcal{D}_1^{\alpha_1}\mathcal{D}_2^{\alpha_2}\mathcal{D}_3^{\alpha_3}.$$

განვიხილოთ ასევე $\widetilde{\mathbb{H}}_0^{-2}(\mathcal{C})$, რომელიც არის $\widetilde{\mathbb{H}}^{-2}(\mathcal{C})$ სივრცის ქვესივრცე და ორთოგანულია შემდეგი სივრცის

$$\widetilde{\mathbb{H}}_\Gamma^{-2}(\mathcal{C}) := \left\{f \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega) \mid (f, \varphi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0, \quad \varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)\right\}.$$

$\widetilde{\mathbb{H}}_\Gamma^{-2}(\mathcal{C})$ შეიცავს ისეთ დისტრიბუციებს $\widetilde{\mathbb{H}}^{-2}(\mathcal{C})$ სივრციდან, რომელთა სუპორტიც Γ-ზეა და $\widetilde{\mathbb{H}}^{-2}(\mathcal{C})$ იყოფა ქვესივრცეების შემდეგი პირდაპირ ჯამად:

$$\widetilde{\mathbb{H}}^{-2}(\mathcal{C}) = \widetilde{\mathbb{H}}_\Gamma^{-2}(\mathcal{C}) \oplus \widetilde{\mathbb{H}}_0^{-2}(\mathcal{C}).$$

$\widetilde{\mathbb{H}}_\Gamma^{-2}(\mathcal{C})$ სივრცე არატრივიალურია (იხ. სიაო & ვენდლანდი, 2008, [45, § 5.1]) და თუ მარჯვენა მხარეში f აღებულია ორთოგონალური ქვესივრციდან, მაშინ $\widetilde{\mathbb{H}}_0^{-2}(\mathcal{C})$ სივრცე უზრუნველყოფს სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობის ერთადერთობას (იხ. სიაო & ვენდლანდი, 2008, [45] და შემდეგ თეორემა 1.15).

(1.38) სასაზღვრო ამოცანისთვის ლაქს-მილგრამის ლემის გამოყენება გვაძლევს შემდეგ შედეგს. მსგავსი დამტკიცებების ნახვა შესაძლებელია (ცაავა, 20019, [71]) სტატიაში.

თეორემა 1.15. (1.1) *სასაზღვრო ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი კლასიკური დასმით:*

$$u \in \mathbb{H}^2(\mathcal{C}), \quad f \in \widetilde{\mathbb{H}}_\Gamma^{-2}(\mathcal{C}), \qquad g \in \mathbb{H}^{3/2}(\Gamma), \qquad h \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma). \tag{1.39}$$

1.15 თეორემიდან ჩვენ არ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ამონახსნი უწყვეტია. თუ კი ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ u ამონახსნი ეკუთვნის $\mathbb{H}^2_p(\mathcal{C})$ სივრცეს ზოგიერთი $2 < p < \infty$-სთვის, მაშინ შეგვიძლია გამოვიყენოთ თუნდაც u ამონახსნის ჰოლდერის უწყვეტობა. ძალიან მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ ამონახსნის მაქსიმალური სიგლუვე როგორიცაა, მაგალითად, შერჩეული მიახლოებითი მეთოდები. ამისათვის (1.38) სასაზრო ამოცანის ამოხსნადობის თვისებებს გამოვიკვლევთ შემდეგი არაკლასიკური დასმით:

$$\begin{gathered} u \in \mathbb{H}^s_p(\mathcal{C}), \quad f \in \widetilde{\mathbb{H}}_p^{s-4}(\mathcal{C}) \cap \widetilde{\mathbb{H}}_0^{-2}(\mathcal{C}), \quad g \in \mathbb{H}_p^{s-1/p}(\Gamma), \\ h \in \mathbb{H}_p^{s-1-1/p}(\Gamma), \quad 1 < p < \infty, \quad s > \frac{1}{p} \end{gathered} \tag{1.40}$$

და ვიპოვით ამოხსნადობისთვის აუცილებელ და საკმარის პირობებს.

ძირითადი თეორემის ჩამოსაყალიბებლად დაგვჭირდება შემდეგი განმარების მოყვანა.

განსაზღვრება 1.16. (1.38) *სასაზღვრო ამოცანა* (1.40) *დასმით არის ფრედჰოლმის, თუ ერთგვაროვან ამოცანას* $f = g = h = 0$ *გააჩნია სასრული რაოდენობა წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი და მხოლოდ სასრული რაოდენობა სასაზღვრო მნიშვნელობის ორთოგონალური პირობები აკმაყოფილებს ამოცანის ამოხსნადობას.*

თეორემა 1.17. *ვთქვათ* (1.40) *პირობები სრულდება:*

a. *მაშინ* (1.38) *სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი წარმოიდგენა ფორმულით*

$$
\begin{aligned}
u(x) = \boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} f(x) + \boldsymbol{W}_{(0,\Gamma)} g(x) - \boldsymbol{W}_{(-1,\Gamma)} h(x) + \boldsymbol{W}_{(-2,\Gamma)} \varphi(x) \\
-\boldsymbol{W}_{(-3,\Gamma)} \psi(x), \qquad u \in \mathbb{H}^2_{\#}(\mathcal{C}), \qquad x \in \mathcal{C}.
\end{aligned}
\tag{1.41}
$$

აქ $N_{\mathcal{C}}$, $\boldsymbol{W}_{(j,\Gamma)}$, $\quad j = \overline{-3,1}$ *წარმოადგენენ ნიუტონის და ფენოვან პოტენციალებს, რომლებიც განმარტებულია ქვემოთ (იხილეთ* (3.135)*) და* (1.41)*-ში მოცემული* φ *და* ψ *არიან შემდეგი სასაზღვრო ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნები*

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{V}^0_{(-2,\Gamma)} \varphi - \boldsymbol{V}^0_{(-3,\Gamma)} \psi = G, \qquad \Gamma - \text{ზე}, \\
\boldsymbol{V}^1_{(-1,\Gamma)} \varphi - \boldsymbol{V}^1_{(-2,\Gamma)} \psi = H, \qquad \Gamma - \text{ზე},
\end{cases}
\tag{1.42}
$$

$$
\varphi \in \widetilde{\mathbb{H}}^r_p(\Gamma), \quad \psi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{r-1}_p(\Gamma), \quad G \in \mathbb{H}^r_p(\Gamma), \quad H \in \mathbb{H}^{r-1}_p(\Gamma),
\tag{1.43}
$$

სადაც $r = s - 1/p$, G *და* H *არიან მოცემული ფუნქციები, ჩაწერილი* f, g *და* h*-ის საშუალებით* (3.141)*-ში § 1 ქვემოთ.*

b. *პირიქითაც: თუ* u *არის* (1.38) *სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი* (1.40) *დასმით, მაშინ* $\varphi := u^+$, $\psi := (\partial_{\boldsymbol{\nu}} u)^+$ *წარმოადგენენ* (1.42) *განტოლებათა სისტემის ამონახსნს.*

c. (1.42) *სასაზღვრო ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას გააჩნია ერთადერთი წყვილი ამონახსნებისა* $\varphi \in \widetilde{\mathbb{W}}^{3/2}(\Gamma)$ *და* $\psi \in \widetilde{\mathbb{W}}^{1/2}(\Gamma)$ *კლასიკური დასმით* $p = 2$ *და* $s = 2$*-სთვის.*

1.17 თეორემის დამტკიცება მოცემულია ქვემოთ.

ჩვენ (1.42) სასაზღვრო ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას ასევე განვიხილავთ სობოლევ-სლობოდეცკის სივრცეში

$$
\varphi \in \widetilde{\mathbb{W}}^r_p(\Gamma), \quad \psi \in \widetilde{\mathbb{W}}^{r-1}_p(\Gamma), \quad G \in \mathbb{W}^r_p(\Gamma), \quad H \in \mathbb{W}^{r-1}_p(\Gamma)
\tag{1.44}
$$

თეორემის ჩამოსაყალიბებლად განვიხილოთ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის მოდელი (შემთხვევა) შემდეგი პირობებით:

$$\begin{cases} iS_{\mathbb{R}}\psi_0(t) = G_0(t), \\ iS_{\mathbb{R}}\varphi_0(t) = H_0(t), \qquad t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.45}$$

სობოლევ-სლობოდეცკის სივრცეში

$$\varphi_0, \psi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}^{r-1}_p(\mathbb{R}), \qquad G_0, H_0 \in \mathbb{W}^{r-1}_p(\mathbb{R}) \tag{1.46a}$$

და ბესელის პოტენციალთა სივრცეში

$$\varphi_0, \psi_0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^{r-1}_p(\mathbb{R}), \qquad G_0, H_0 \in \mathbb{H}^{r-1}_p(\mathbb{R}). \tag{1.46b}$$

აქ

$$S_{\mathbb{R}}v(t) := \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(\tau)d\tau}{\tau - t}, \quad v \in \mathbb{L}_p(\mathbb{R}) \tag{1.47}$$

ინტეგრალი გაგებულია კოშის მთავარი მნიშვნელობის აზრით.

თეორემა 1.18. *ვთქვათ* $1 < p < \infty$, $r = s - \dfrac{1}{p} > -1$.

(1.42) *სასაზღვრო ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა არის ფრედჰოლმის სობოლევ-სლობოდეცკისა* (1.43) *და ბესელის პოტენციალთა* (1.44) *სივრცეში, თუ* (1.45) *სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემა არის ლოკალურად შებრუნებადი* 0-*ში* (1.46a) *და* (1.46b) *პირობებში, შესაბამისად.*

შენიშვნა 1.19. *1.18 თეორემის დასამტკიცებლად ვიყენებთ* (1.38) *სასაზღვრო ამოცანის კვაზი-ლოკალიზაციას, რის შედეგად დავდივართ შესაბამის მოდელურ სასაზღვრო ამოცანაზე ნახევარ სიბრტყეში (იხ. ლემა 3.45). შეზღუდვა* $r > -1$ *არის ბუნებრივი, ვინაიდან ჩვენ ვიხილავთ სასაზღვრო ამოცანას.*

დასმული ამოცანის გამოსაკვლევად გამოყენებული იქნება (1.42) *განტოლების ლოკალურად კვაზი-ექვივალენტურობა.*

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, კვაზი-ლოკალიზაცია გულისხმობს "კოეფიციენტის გაყინვას"და მოცემული კონტურისა და ზედაპირის "გასწორებას".

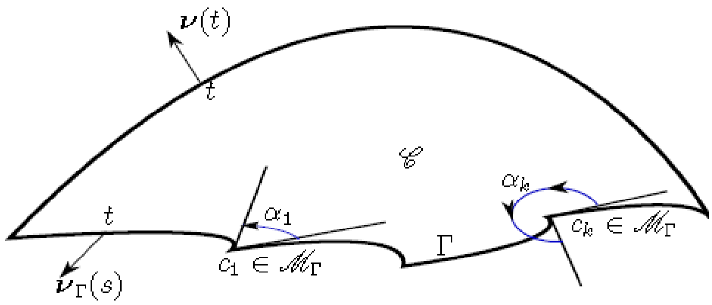
მოცემული (1.38) სასაზღვრო ამოცანის ლოკალიზებით ჩვენ ვღებულობთ 2 განსხვავებულ მოდელურ ამოცანას:

1 ლოკალიზაცია $\mathcal{C}$ ზედაპირის შიგა წერტილებში;

2 ლოკალიზაცია Γ საზღვრის შიგა წერტილებში.

კვაზი-ლოკალიზაციის შედეგად მიღებული მოდელური სასაზღვრო ამოცანა პირველ შემთხვევაში კარგად გამოიკვლევა და ასეთ მოდელურ ამოცანებს აქვთ ერთადერთი ამონახსნი დამატებითი პირობების გარეშე. მეორე შემთხვევაში ჩვენ ვღებულობთ შერეულ სასაზღვრო ამოცანას ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის ნახევარ სიბრტყეში (იხილეთ (3.143) ქვემოთ). სისტემა (1.45) შეესაბამება (3.143) მოდელურ ამოცანას ისე, როგორც (1.38) სასაზღვრო ამოცანა შეესაბამება (1.42) სისტემას.

განვიხილოთ ჰელმჰოლცის განტოლება $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ ჰიპერზედაპირზე ლიფშიცის Γ საზღვრით, სადაც $\boldsymbol{\nu} := (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^\top$ წარმოადგენს ნორმალურ ვექტორულ ველს $\mathcal{C}$ ზედაპირზე.



$\mathcal{C}$ ზედაპირზე განვიხილოთ შერეული სასაზღვრო ამოცანა

$$\begin{cases} \Delta_{\mathcal{C}} u(t) + k^2 u(t) = f(t), & t \in \mathcal{C}, \\ u^+(s) = g(s), & \Gamma_D - \text{ზე}, \\ (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} u)^+(s) = h(s), & \Gamma_N - \text{ზე}, \end{cases} \tag{1.48}$$

სადაც $\Delta_{\mathcal{C}}$ არის ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორი

$$\Delta_{\mathcal{C}} := \mathcal{D}_1^2 + \mathcal{D}_2^2 + \mathcal{D}_3^2.$$

და $\mathcal{D}_j := \partial_j - \nu_j \partial_{\boldsymbol{\nu}}$, $j = 1, 2, 3$, არიან გიუნტერის მხები წარმოებულები ზედაპირზე, $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. როცა $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$, მაშინ გიუნტერის მხები წარმოებულები ემთხვევა კოორდინატით გაწარმოებას $\mathcal{D}_j := \partial_j$ და ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორი ემთხვევა ლაპლასის ოპერატორს $\Delta_{\mathcal{C}} = \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$.

$\boldsymbol{\nu}_\Gamma := (\nu_{\Gamma,1}, \nu_{\Gamma,2}, \nu_{\Gamma,3})^\top$ არის ნორმალური ვექტორული ველი Γ საზღვარზე და ამასთან $\mathcal{S}$ ზედაპირისთვის მხები, ხოლო $\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} = \nu_{\Gamma,1}\mathcal{D}_1 + \nu_{\Gamma,2}\mathcal{D}_2 + \nu_{\Gamma,3}\mathcal{D}_3$ არის ნორმალური წარმოებული. $\mathcal{M}_\Gamma$ აღნიშნავს Γ საზღვრის კვანძების (კუთხოვანი წერტილების) სიმრავლეს, რომელსაც ემატება წერტილები, სადაც დირიხლეს და ნეიმანის პირობა ხვდება ერთმანეთს. $\mathcal{M}_\Gamma$ გაყოფილია სამ ქვესიმრავლედ: $\mathcal{M}_\Gamma = \mathcal{M}_D \cup \mathcal{M}_N \cup \mathcal{M}_{DN}$. $\mathcal{M}_D$ აღნიშნავს ყველა c_j კვანძების სიმრავლეს, სადაც დირიხლეს პირობები ხვდება ერთმანეთს, $\mathcal{M}_N$ აღნიშნავს ყველა c_j კვანძების სიმრავლეს, სადაც ნეიმანის პირობები ხვდება ერთმანეთს, ხოლო $\mathcal{M}_{DN}$ აღნიშნავს ყველა c_j კვანძების სიმ-

რავლეს, სადაც დირიხლეს და ნეიმანის პირობები ხვდება ერთმანეთს და α_j შეიძლება იყოს ნებისმიერი $0 < \alpha_j < 2\pi$.

განვიხილოთ მოდელური Ω_α არე, რომელიც წარმოადგენს ბრტყელ კუთხეს, რომლის საზღვარია ორი სხივი $\mathbb{R}^+$ და $\mathbb{R}_\alpha$ და მათ შორის კუთხე არის α (იხილეთ ნახ. 1). შესაბამისი საზღვარი არის მოდელური მრუდი:

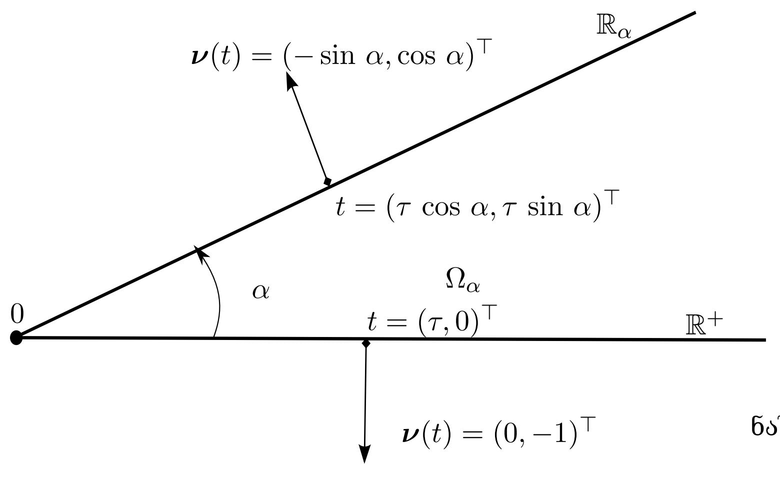
$$\begin{gathered}\Gamma_\alpha := \partial\Omega_\alpha = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}_\alpha, \qquad \mathbb{R}^+ = [0, \infty), \qquad 0 < \alpha < 2\pi, \\ \mathbb{R}_\alpha := \{e^{i\alpha}t = (t\cos\alpha, t\sin\alpha) \ : \ t \in \mathbb{R}^+\}.\end{gathered} \tag{1.49}$$

Γ_α საზღვარზე ვექტორული ველის ერთეულოვანი ნორმალი $\{\boldsymbol{\nu}(x)\}_{x\in\Gamma_\alpha}$ განმარტებულია ტოლობით

$$\boldsymbol{\nu}(x) = \begin{cases} (0, -1)^\top, & x \in \mathbb{R}^+ \\ \\ (-\sin\alpha, \cos\alpha), & x \in \mathbb{R}_\alpha \end{cases} \tag{1.50}$$

და განსაზღვრავს შემდეგ ნორმალურ წარმოებულს $\partial_{\boldsymbol{\nu}}$ საზღვარზე:

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}(t)} = \begin{cases} -\lim\limits_{(x_1,x_2)\to t=(\tau,0)} \partial_{x_2}, & t \in \mathbb{R}^+, \\ \\ \lim\limits_{(x_1,x_2)\to t=(\tau\cos\alpha,\tau\sin\alpha)} [-\sin\alpha\,\partial_{x_1} + \cos\alpha\,\partial_{x_2}], & t \in \mathbb{R}_\alpha. \end{cases} \tag{1.51}$$



ნახ. 1

1.48 სასაზღვრო ამოცანის ლოკალიზაციის შედეგად მიიღება შემდეგი მოდელური ამოცანები: მოდელური დირიხლეს ამოცანა

$$\begin{cases} \Delta u(t) + k^2 u(t) = f(t), & t \in \Omega_\alpha, \\ \\ u^+(s) = g(s), & \Gamma_\alpha = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}_{\alpha-\text{ზე}}, \end{cases} \tag{1.52}$$

$$u \in \mathbb{H}^s_p(\Omega_\alpha), \quad f \in \widetilde{\mathbb{H}}^{s-2}_p(\Omega_\alpha) \cap \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}_0(\Omega_\alpha), \quad g \in \mathbb{H}^{s-1/p}_p(\Gamma_\alpha), \quad 1 < p < \infty, \quad s > \frac{1}{p}$$

$c_j \in \mathcal{M}_D$ კვანძებში (სადაც დირიხლეს პირობები ხვდება ერთმანეთს).

მოდელური ნეიმანის ამოცანა

$$\begin{cases} \Delta u(t) + k^2 u(t) = f(t), & t \in \Omega_\alpha, \\ (\partial_{\boldsymbol{\nu}} u)^+(s) = h(s), & \Gamma_\alpha = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}_\alpha - \text{ზე}, \end{cases} \tag{1.53}$$

$$u \in \mathbb{H}^s_p(\Omega_\alpha), \quad f \in \widetilde{\mathbb{H}}^{s-2}_p(\Omega_\alpha) \cap \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}_0(\Omega_\alpha), \quad h \in \mathbb{H}^{s-1-1/p}_p(\Gamma_\alpha), \quad 1 < p < \infty, \quad s > \frac{1}{p}$$

$c_j \in \mathcal{M}_N$ კვანძებში (სადაც ნეიმანის პირობები ხვდება ერთმანეთს).

მოდელური შერეული ამოცანა

$$\begin{cases} \Delta u(t) + k^2 u(t) = f(t), & t \in \Omega_\alpha, \\ u^+(s) = g(s), & \mathbb{R}^+ - \text{ზე}, \\ (\partial_{\boldsymbol{\nu}} u)^+(s) = h(s), & \mathbb{R}_\alpha - \text{ზე}, \end{cases} \tag{1.54}$$

$$u \in \mathbb{H}^s_p(\Omega_\alpha), \quad f \in \widetilde{\mathbb{H}}^{s-2}_p(\Omega_\alpha) \cap \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}_0(\Omega_\alpha), \quad g \in \mathbb{H}^{s-1/p}_p(\mathbb{R}^+), \quad h \in \mathbb{H}^{s-1-1/p}_p(\mathbb{R}_\alpha),$$
$$1 < p < \infty, \quad s > \frac{1}{p}$$

$c_j \in \mathcal{M}_{DN}$ კვანძებში (სადაც დირიხლეს და ნეიმანის პირობები ხვდება ერთმანეთს) და კომპლექსური პარამეტრისათვის $\operatorname{Im} k \neq 0$. აქ u^+ და $(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} u)^+$ აღნიშნავენ შესაბამისად დირიხლეს და ნეიმანის კვალებს საზღვარზე.

თეორემა 1.20 (ლოკალური პრინციპი, [6]). *საწყისი შერეული* (1.48) *სასაზღვრო ამოცანა არაკლასიკური დასმით არის ფრედჰოლმის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ* (1.52), (1.53) *და* (1.54) *მოდელური ამოცანები ფრედჰოლმურია არაკლასიკური დასმით კვანძის ყველა წერტილისთვის* $c_j \in \mathcal{M}_\Gamma$.

1.52 და 1.53 სასაზღვრო ამოცანები განხილულია რ. დუდუჩავას მიერ [31]. ჩვენ განვიხილავთ მოდელურ შერეულ სასაზღვრო ამოცანას, რომელსაც ეყრდნობა წინა თეორემის დამტკიცება.

მათემატიკური ფიზიკის მრავალი ამოცანა, მაგალითად, ბზარების ამოცანა დრეკად გარემოში, ელექტრომაგნიტური ტალღების გაბნევა ზედაპირის მიერ და სხვა ყალიბდება სასაზღვრო ამოცანის სახით ელიფსური კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის ბრტყელ არეში კუთხოვანი საზღვრით. ერთერთ ნაშრომში ბუჩუკური, 2013, [6] ასეთი სასაზღვრო ამოცანები ლოკალიზაციის მეთოდით დაყვანილია ექვივალენტურ მოდელურ ამოცანებზე ბრტყელ Ω_{α_j} არეში $0 < \alpha_j < 2\pi$ კუთხით, $j = 1, \dots, m$. სადისერტაციო ნაშრომის მიზანია გამოვიკვლიოთ შერეული 1.54 სასაზღვრო ამოცანა ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის მოდელურ Ω_α არეში.

შევნიშნოთ, რომ $\alpha = \pi$ შემთხვევა დირიხლეს და ნეიმანის ამოცანებისთვის უკვე კარგად არის ცნობილი (გლუვი საზღვრის შემთხვევა), ხოლო შერეული სასაზღვრო ამოცანა არაკლასიკური დასმით არ იყო გამოკვლეული არათუ $\alpha \neq \pi$ კუთხისთვის, არამედ $\alpha = \pi$ კუთხისთვისაც.

სწორედ ეს ორივე შემთხვევა არის გამოკვლეული რ. დუდუჩავასა და მ. ცაავას სტატიებში: $\alpha = \pi$ შემთხვევა [35] და $\alpha \neq \pi$ შემთხვევა [34] სტატიებში.

მოდით, დავიწყოთ (1.54) სასაზღვრო ამოცანისთვის ამონახსნის არსებობის შედეგებით. თუ ლაქს-მილგრამის ლემას გამოვიყენებთ ასეთ სასაზღვრო ამოცანებზე, მოგვცემს ამონახნის შემდეგ შედეგს:

თეორემა 1.21. (1.54) *შერეულ სასაზღვრო ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი კლასიკური დასმით:*

$$u \in \mathbb{H}^1(\Omega_\alpha), \qquad f \in \widetilde{\mathbb{H}}_0^{-1}(\Omega_\alpha), \qquad g \in \mathbb{H}^{1/2}(\mathbb{R}_\alpha), \qquad h \in \mathbb{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^+). \tag{1.55}$$

დამტკიცება: თეორემა მტკიცდება მსგავსი 2.1 თეორემის დამტკიცების ანალოგიურად (აგრეთვე იხილეთ შენიშვნა 2.2 და შენიშვნა 2.3 დუდუჩავა, 2014, [36] სტატიაში). დუდუჩავა, 2014, [36] სტატიაში გამოკვლეული ოპერატორი არის ძალიან მსგავსი: წარმოადგენს ლაპლას-ბელტრამის ოპერატოს 0 რიგის შესაკრებით კომპაქტურ ზედაპირზე. ძირითადი ინსტრუმენტი, ლაქს-მილგრამის ლემა, თანაბრად წარმატებით გამოიყენება არა-კომპაქტური არეებისთვისაც. $\square$

როგორც ჩვენ ვხედავთ თეორემა 1.21-დან, (1.54) სასაზღვრო ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი (1.55) კლასიკური დასმით, რომელიც არ არის დამოკიდებული საზღვარზე კუთხის წერტილების მნიშვნელობაზე. თუმცა ამონახსნის ეს თვისება შეიცვლება მკვეთრად როგორც კი (1.54) სასაზღვრო ამოცანას განვიხილავთ არაკლასიკური დასმით

$$\begin{gathered} u \in \mathbb{H}_p^s(\Omega_\alpha), \quad f \in \widetilde{\mathbb{H}}_p^{s-2}(\Omega_\alpha) \cap \widetilde{\mathbb{H}}_0^{-1}(\Omega_\alpha), \quad g \in \mathbb{H}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}_\alpha), \\ h \in \mathbb{H}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}^+), \qquad 1 < p < \infty, \quad \frac{1}{p} < s < 1 + \frac{1}{p}, \end{gathered} \tag{1.56}$$

(იხილეთ დაბლა შენიშვნა 1.23). ეს მიუთითებს, რომ ამონახსნის წარმოებულებს გააჩნია სინგულარობები, რომელიც დამოკიდებულია საზღვრის კუთხეებზე; თუმცა, ეს უკვე დიდი ხანია ცნობილია, ჩვენ პირველად ვხვდებით "აკრძალული კუთხების"ყველა მნიშვნელობას თეორემა 1.22 ქვემოთ.

შევნიშნოთ, რომ $\frac{1}{p} < s < 1 + \frac{1}{p}$-ში ზედა შეზღუდვა უზრუნველჰყოფს ბესელის პოტენციალთა და სობოლევ-სლობოდეცკის სივრცეების ინვარიანტულ განმარტებას მაშინ, როცა ქვედა შეზღუდვა უზრუნველჰყოფს საზღვარზე u^+ კვალის არსებობას.

უფრო მეტიც, თეორემა 1.21-დან ჩვენ ვერც კი დავასკვნით, რომ ამონახსნი უწყვეტია ჩაკეტილ $\overline{\Omega}_\alpha$ არეში. თუკი შევძლებთ დავამტკიცოთ, რომ არსებობს ამონახსნი $u \in \mathbb{H}_p^1(\Omega_\alpha)$ ზოგიერთი $2 < p < \infty$-თვის, მაშინ შეგვიძლია ვისარგებლოთ თუნდაც u ამონახსნის ჰოლდერის უწყვეტობით $\overline{\Omega}_\alpha$ არეში. ეს ძალიან მნიშვნელოვანია გავიგოთ ამონახსნის მაქსიმალური სიგლუვე ზოგიერთ ამოცანებში, მაგალითად, მიახლოებით მეთოდებში.

არაკლასიკური (1.56) დასმით განხილვისას u^+ ამონახსნის კვალი Γ_α საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგი თავსებადობის პირობებს:

$$\begin{aligned} u^+_+ - \boldsymbol{J}_\alpha u^+_\alpha &\in \widetilde{\mathbb{W}}^{s-1/p}_p(\mathbb{R}^+), \\ (\partial_{\boldsymbol{\nu}} u)^+_+ + \boldsymbol{J}_\alpha (\partial_{\boldsymbol{\nu}} u)^+_\alpha &\in \widetilde{\mathbb{W}}^{s-1/p-1}_p(\mathbb{R}^+), \end{aligned} \tag{1.57}$$

სადაც v^+_+ აღნიშნავს კვალს $\mathbb{R}^+$-ზე, v^+_α აღნიშნავს კვალს $\mathbb{R}_\alpha$-ზე და

$$\boldsymbol{J}_\alpha \varphi(t) = \varphi(t\cos\alpha, t\sin\alpha), \qquad t \in \mathbb{R}^+ \tag{1.58}$$

არის "უკან დაბრუნების"("pull back") ოპერატორი $\mathbb{R}_\alpha$-დან $\mathbb{R}^+$-ში. თავსებადობის ეს პირობები წარმოადგენს $u \in \mathbb{H}^s_p(\Omega_\alpha)$ ჩართვის პირდაპირ შედეგებს და Ω_α საზღვარზე მოცემული კვალების თვისებებს.

ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი თეორემა, რომელიც დამტკიცებულია § 4 პარაგრაფში.

თეორემა 1.22. *ვთქვათ $\alpha \in (0, 2\pi)$, $1 < p < \infty$ და $\dfrac{1}{p} < s < 1 + \dfrac{1}{p}$. შერეული სასაზღვრო (1.54) ამოცანა არის ფრედჰოლმის არაკლასიკური (1.56) დასმით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ:*

$$e^{4\pi(s-1/p)i} \sin^2 \pi\left(s + 1 - \frac{2}{p} + i\xi\right) - \cos^2(\pi - \alpha)\left(s + 1 - \frac{2}{p} + i\xi\right) \neq 0, \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{1.59}$$

$\xi \neq 0$-თვის (1.59) განტოლებას აქვს ზუსტად 4 ამონახსნი $p'_\pm(s), p''_\pm(s) \in (1, \infty)$ ნებისმიერი $s \in (1/p, 1/p + 1$-თვის და s, α და p-ის ასეთი მნიშვნელობისთვის (1.54) სასაზღვრო ამოცანა არის ფრედჰოლმის არაკლასიკური (1.56) დასმით.

$\xi = 0$-თვის (1.49) განტოლება აკმაყოფილებს ფორმას

$$e^{2\pi r i} \sin \pi\left(s + 1 - \frac{2}{p}\right) \pm \cos(\pi - \alpha)\left(s + 1 - \frac{2}{p}\right) \neq 0. \tag{1.60}$$

შემდეგი ექვივალენტურია (1.60)-ის და წარმოადგენს შერეული სასაზღვრო (1.54) ამოცანის ფრედჰოლმურობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს (1.56) დასმით:

1) $s \neq \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{3}{4}$ *და კუთხე* $\alpha \in (0, 2\pi)$ *ნებისმიერია;* (1.61a)

2) *თუ* $s = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{4},\ 1 < p < 2,$ *მაშინ* $\alpha \neq 2\pi\dfrac{p}{4-p},\ 4\pi\dfrac{2-p}{4-p};$
და $2 \leqslant p < \infty -$ *თვის კუთხე* $\alpha \in (0, 2\pi)$ *ნებისმიერია;* (1.61b)

3) *თუ* $s = \dfrac{1}{p} + \dfrac{3}{4},\ 2 < p < \infty,$ *მაშინ* $\alpha \neq 2\pi\dfrac{p}{3p-4},\ 4\pi\dfrac{p-2}{3p-4};$
და $1 < p \leqslant 2 -$ *თვის კუთხე* $\alpha \in (0, 2\pi)$ *შესაძლებელია იყოს ნებისმიერი.* (1.61c)

კერძოდ, (1.54) სასაზღვრო ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი ნებისმიერი $0 < \alpha < 2\pi$-თვის არაკლასიკური (1.56) დასმით, თუ:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{4} < s < \frac{1}{p} + \frac{3}{4}, \quad \text{და} \quad \frac{4}{3} < p < 4. \tag{1.62}$$

შენიშვნა 1.23. (1.62)-*დან პირდაპირ გამომდინარეობს, რომ* (1.54) *სასაზღვრო ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი* (1.56) *დასმით, მაგრამ* $p = 2$-*თვის თუ*

$$\frac{3}{4} < s < \frac{5}{4}. \tag{1.63}$$

როგორც უკვე ვიცით თეორემა 1.49-დან და ასევე როგორც გამომდინარეობს (1.63)-*დან,* $p = 2$, $s = 1$-*თვის (კლასიკური დასმა)* (1.54) *სასაზღვრო ამოცანას არ აქვს "აკრძალული* α *კუთხე"და ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია* α-*ს ყველა მნიშვნელობისთვის (იხ. თეორემა 1.21). "აკრძალული* α *კუთხე"შესაძლოა გაჩნდეს მხოლოდ მაშინ, როცა* $p \neq 2$ *ან* $s \neq 1$ *და ამ კუთხეებისთვსი ამოცანა არ არის ფრედჰოლმის.*

თეორემა 1.22 არის შემდეგი ორი 1.24 და 1.25 თეორემის შედეგი.

თეორემა 1.24. *ვთქვათ* $1 < p < \infty$ *და* $\frac{1}{p} < s < 1 + \frac{1}{p}$. *ვთქვათ* $g_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1/p}(\Gamma_\alpha)$ *და* $h_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\Gamma_\alpha)$ *არიან* $g \in \mathbb{W}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}_\alpha)$ *და* $h \in \mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}^+)$ *სასაზღვრო პირობების რაიმე ფიქსირებული გაგრძელება (არაკლასიკური შემთხვევა), რომლებიც თავიდან განსაზღვრული იყვნენ* Γ_α *საზღვრის* $\mathbb{R}_\alpha$ *და* $\mathbb{R}^+$ *ქვესიმრავლეზე მხოლოდ..*

(1.54) *სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი წარმოიდგინება ფორმულით*

$$u(x) = \boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} f(x) + \boldsymbol{W}_\Gamma(g_0 + \varphi_0)(x) - \boldsymbol{V}_\Gamma(h_0 + \psi_0)(x), \qquad x \in \Omega_\alpha, \tag{1.64}$$

სადაც φ_0 *და* ψ_0 *არიან შემდეგი ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნები*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\varphi_0(t) + r_{\mathbb{R}^+}\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,-1}\psi_0(t) = G_+(t), & t \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{1}{2}\psi_0(t) - r_{\mathbb{R}_\alpha}\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,+1}\varphi_0(t) = H_-(t) & t \in \mathbb{R}_\alpha, \end{cases} \tag{1.65}$$

$$\varphi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^+), \qquad \psi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}_\alpha),$$

$$G_+ := r_{\mathbb{R}^+}G_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^+), \qquad H_- = r_{\mathbb{R}_\alpha}H_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}_\alpha),$$
$$G_0 := (\boldsymbol{N}_{\Delta+k^2}f)^+ - \frac{1}{2}g_0 + \boldsymbol{W}_{\Delta+k^2,0}g_0 - \boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,-1}h_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1/p}(\Gamma_\alpha),$$
$$H_0 := (\partial_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{N}_{\Delta+k^2}f)^+ - \frac{1}{2}h_0 + \boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,+1}g_0 - \boldsymbol{W}^*_{\Delta+k^2,0}h_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\Gamma_\alpha).$$

პირიქითაც: თუ $\varphi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^+)$, $\psi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}_\alpha)$ *წყვილი წარმოადგენს* (1.65) *სისტემის ამონახსნს* g *და* h *სასაზღვრო პირობების რაიმე ფიქსირებული* $g_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1/p}(\Gamma_\alpha)$, $h_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\Gamma_\alpha)$ *გაგრძელებისთვის* Γ_α-*მდე, მაშინ* (1.64) *ტოლობაში მოცემული* $u(x)$ *ფუნქცია არის* (1.54) *სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი და* $u^+ = g_0 + \varphi_0$, $(\partial_{\boldsymbol{\nu}}u)^+ = h_0\psi_0$.

ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა (1.65) *სისტემას გააჩნია ამონახსნთა ერთადერთი* $\varphi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}^{1/2}(\mathbb{R}^+) \cap \widetilde{\mathbb{H}}^{1/2}(\mathbb{R}^+)$ *და* $\psi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}^{-1/2}(\mathbb{R}_\alpha) \cap \widetilde{\mathbb{H}}^{-1/2}(\mathbb{R}_\alpha)$ *წყვილი კლასიკური დასმით* $p = 2$, $s = 1$.

თეორემის 1.24 და მტკიცება მოცემულია § 4 თავში.

(1.65) სისტემისთვის შეგვიძლია მოვხსნათ შეზღუდვა $\frac{1}{p} < s < 1 + \frac{1}{p}$ და განვიხილოთ ორი განსხვავებული შემთხვევა ნებისმიერი $r \in \mathbb{R}$-თვის:

$$\varphi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}^r_p(\mathbb{R}^+), \quad \psi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}^{r-1}_p(\mathbb{R}^+), \quad G \in \mathbb{W}^r_p(\mathbb{R}^+), \quad H \in \mathbb{W}^{r-1}_p(\mathbb{R}^+), \tag{1.66a}$$

$$\varphi_0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^r_p(\mathbb{R}^+), \quad \psi_0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^{r-1}_p(\mathbb{R}^+), \quad G \in \mathbb{H}^r_p(\mathbb{R}^+), \quad H \in \mathbb{H}^{r-1}_p(\mathbb{R}^+) \tag{1.66b}$$

თეორემა 1.25. *ვთქვათ $1 < p < \infty$, $r \in \mathbb{R}$.*

სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა (1.65) სისტემა არის ფრედჰოლმის სობოლევ-სლობოდეცკისა (1.66a) და ბესელის პოტენციალთა (1.66b) სივრცეებში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ:

$$\sin\pi\left(\frac{1}{p} - r - 1 - i\xi\right) \pm e^{-2\pi ri}\cos(\pi-\alpha)\left(\frac{1}{p} - r - 1 - i\xi\right) \neq 0. \tag{1.67a}$$

$\xi \neq 0$-თვის (1.67a) განტოლებას აქვს ზუსტად 4 ამონახსნი $p'_\pm(r), p''_\pm(r) \in (1,\infty)$ ნებისმიერი $r \in \mathbb{R}$-თვის.

$\xi = 0$-თვის (1.67a) განტოლება აკმაყოფილებს ფორმას

$$e^{2\pi ri}\sin\pi\left(\frac{1}{p} - r - 1\right) \pm \cos(\pi-\alpha)\left(\frac{1}{p} - r - 1\right) \neq 0. \tag{1.67b}$$

შემდეგი ექვივალენტურია (1.67b) განტოლების და (1.67a)-თან ერთად წარმოადგენს შერეული სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებათა (1.65) სისტემის ფრედჰომლურობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს (1.66a) და (1.66b) პირობებში:

1) $r \neq 0, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} - \frac{1}{4}, \frac{1}{p} - \frac{\pi + 2\pi n}{2(\pi-\alpha)} - 1 \quad n = \pm1, \pm2, \ldots -$ *თვის*
და კუთხე $\alpha \in (0, 2\pi)$ *ნებისმიერია;* (1.68a)

2) *თუ* $r = \frac{1}{p} - \frac{\pi + 2\pi n}{2(\pi-\alpha)} - 1, \ \frac{n}{2}$ *მაშინ* $\alpha \neq \pi\frac{2k+1}{2n}$ *სადაც*
$k = 0, \pm1, \ldots, \ n = \pm1, \pm2, \ldots$ *არიან ისეთი, რომ* $0 < \frac{2k+1}{2m} < 2.$ (1.68b)

3) *თუ* $r = \frac{n}{2}, n = 0, \pm1, \ldots,$ *მაშინ* $p \neq \frac{4}{3}, 4.$ (1.68c)

4) *თუ* $r = \frac{n}{2} - \frac{1}{4},$ *მაშინ* $\alpha, \ 2\pi - \alpha \neq 2\pi p\frac{2k+1}{4-2np-3p}$ *სადაც*
$k, n = 0, \pm1, \ldots$ *არიან ისეთი, რომ* $0 < p\frac{2k+1}{4-2np-3p} < 1.$ (1.68d)

(1.65) *სისტემას აქვს ამონახსნთა ერთადერთი წყვილი* (1.66a) *და* (1.66b) *სივრცეებში, თუ:*

$$\begin{aligned} &-\frac{3}{4} < r \leqslant \frac{1}{p} - 1 \quad 1 < p \leqslant 2 - \quad \text{თვის}, \\ &\frac{1}{p} - 1 \leqslant r < -\frac{1}{4} \quad 2 \leqslant p < \infty - \quad \text{თვის}. \end{aligned} \tag{1.69}$$

თეორემის 1.25 დამტკიცება მოცემულია § 4 თავში.

სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების გამოკვლევისას წარმოიქმნებოდა სირთულეები, ვინაიდან სობოლევ-სლობოდეცკისა (1.65) და ბესელის პოტენციალთა (1.66a) სივრცეებში მელინის კონვოლუციის (1.66b) განტოლებებზე შედეგები არ არსებობდა. ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის სასაზღვრო ამოცანის გამოკვლევისას ბესლის პოტენციალთა და სობოლევ-სლობოდეცკის სივრცეებში გამოყენებულია შედეგები, რომლებიც მიღებულია მელინის კონვოლუციის განტოლებებისთვის მერომორფული გულით რ. დუდუჩავასა [30] და ვ. დიდენკო და რ. დუდუჩავას ერთობლიც სტატიაში [18]. შესაბამისი ოპერატორის სიმბოლო $\mathcal{M}^s_{\alpha,p}(\omega)$ ჩაწერილია და წარმოადგენს ფუნქციას უსასრულო $\mathfrak{R}$ მართკუთხედზე, და სიმბოლო უზრუნველჰყოფს ოპერატორის ინდექსს და ფრედჰოლმურობის თვისებებს.

ელიფსური განტოლებებისათვის სასაზღვრო ამოცანებში ორ და მრავალგანზომილებიან არეებში კიდეებით და კონუსებით საზღვარზე უდიდესი წვლილი შეიტანა ვ. კონდრატიევმა თავის ცნობილ ნაშრომში [48]. მეთოდი დაფუძნებულია მელინის გარდაქმნაზე და საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ ამონახსნის ასიმპტოტები. მიდგომა სარგებლობდა დიდი პოპულარულობით და ინტენსიურად გამოიყენებოდა ლიტერატურაში, სტატიებსა და მონოგრაფიებში პ. გრისვარდის, 1985, [41], მ. დოჟის, 1988, [17], ვ. კოზლოვის, ბ. მაზიასა & ჟ. როზმანის, 2001, [49] და სხვა ავტორების მიერ. გამოკვლევები ძირითადად ტარდებოდა კონდრატიევის სპეციალურ წონიან სივრცეებში, რომლებიც მორგებულია არეებზე, რომლებსაც გააჩნია სინგულარობები.

[9, 10, 10, 11] სტატიებში ლ.კასტრომ და დ. კაპანაძემ (1.54) სასაზღვრო ამოცანა ლუწი და კენტი გაგრძელებებით და არეკვლის ოპერატორების მანიპულირებით დაიყვანეს $\mathbb{H}^{1+\varepsilon}(\Omega_\alpha)$ სივრცეში ექვივალენტურ ვინერ-ჰოფს $\pm$ ჰენკელის ოპერატორების განტოლებაზე. მიღებული განტოლებები გამოკვლეული იქნა $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^+)$ სივრცეში და უკანასკნელ [11] სტატიაში გამოკვლეულია სპეციალურ პოტენციალთა სივრცეში, რომელიც განმარტებულია მელინის გარდაქმნებით.

[50, 51, 52, 53] ნაშრომების სერიაში პ.ა. კრუტიცკიმ გამოიკვლია სასაზღვრო ამოცანები ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის ბრტყელ 2-განზომილებიან შემოუსაზღვრელ Ω არეში რომელიც არის გარე არე სასრული რაოდენობის არეებისა და ჭრილების მიმართ განსხვავებული სასაზღვრო პირობებით. ამოხსნის ერთადერთობა დამტკიცებულია მკაცრი კლასიკური დასმით $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

მოდელური სასაზღვრო ამოცანების მკაცრი ანალიზური ამოხსნები განსხვავებული სასაზღვრო პირობებით გადამწყვეტია ელიფსური სასაზღვრო ამოცანების გასაგებად ლიფშიცის არეებში (ფიზიკური შინაარსისა და ადრე შესრულებული ნაშრომებისთვის იხილეთ სტატიები: კაპანაძე & შულცე, 2003; კოზლოვი, 20001, [46, 49] და მეისტერი, 1987, [59]). ბუჩუკური, 2013, [6] სტატიაში აღწერილია როგორ უნდა გამოვიყენოთ ლოკალიზაციის თანამედროვე

ტექნიკა სასაზღვრო ამოცანების გამოსაკვლევად არეებში ლიფშიცის საზღვრით, თუ შევზღუდავთ მათ ზოგიერთი ლოკალურ სასაზღვრო ამოცანამდე მოდელურ არეებში.

მოდელური სასაღვრო ამოცანები რაციონალური კუთხეების შემთხვევაში კლასიკური დასმით ამოხსნილია მკაფიოდ სტატიბში ერჰარდტი, 2011, 2014, [38, 37]. სხვა ცნობილი შედეგები ან ძალიან შემოიფარგლება სპეციალური პირობებით, როგორიცაა მართკუთხა შემთხვევა (კასტრო, 2004, 2006; მეისტერი, 1993, [13, 14, 61]), ან არიან ძალიან რთულნი, როცა საქმე ეხება ანალიზურ მეთოდებს (იხილეთ კომეჩი, 2005; ჟევანდროვი & მერზონი, 2000, [47, 75]) ან არ არის აღწერილი შესაბამისი ფუნქციების სივრცე, იხილეთ, მაგ. მალიუჟინეცი, 1959, [57]. ისტორიული ცნობებისა და შემდგომი კვლევებისთვის იხილეთ სტატიები (ჟევანდროვი & მერზონი, 2000, ვასილევი, 2000, [10, 75, 73]).

კიდევ ერთი მიდგომა, რომლის გამოყენებაც შეიძლება, არის შეზღუდვის შთანთქმის პრინციპი, რომელიც ემყარება ვარიაციულ ფორმულირებას და ლაქს-მილგრამის ლემას და მის განზოგადებას (იხ. მაგალითად, ბონე-ბენ დია & ტილექინი, 2001; ბონე-ბენ დია, 2012, [5, 3, 4]), მაგრამ, ამ შემთხვევებშიც სასაზღვრო ამოცანა კვლავ განხილულია კლასიკური დასმით მხოლოდ $p = 2$-სთვის.

გასული საუკუნის 60-იან წლებში შემოთავაზებული იყო სობოლევის სივრცეში კანონიკური დიფრაქციული ამოცანის გადაჭრა, რომელიც დაყრდნობილი იყო ფსევდოდიფერენციალური განტოლების შედეგებზე კუთხოვან არეებში და, ზოგადად, ლიფშიცის არეებში (იხილეთ სტატიები მეისტერი, 1985, 1987; [58, 59], მეისტერი & შპეკი, 1979, [60], დუშ-სანტუში & ტეხეირა, 1989, [66] და სხვა). ვასილევის წიგნში [73] მოცემულია ლიტერატურის მნიშვნელოვანი ჩამონათვალი.

აქ არის მრავალი სხვა ნაშრომი, სადაც კონკრეტული დიფრაქციის პრობლემებია შესწავლილი. ჩვენ შემოვიფარგლებით მხოლოდ ზოგიერთი მათგანის გადაფასებით: კასტრო & კაპანაძე, 2006, 2008, 2010; კასტრო, შპეკი & ტეხეირა, 2003, [8], [9], [10] [12], კრუტიცკი, 2001, 2009, [51], [53], კომეჩი, 2005, [47], მალიუჟინეცი, 1959, [57], მეისტერი, 1993, [61], მოურა, დუშ-სანტუში & ბერნარდინო, 2011, [63], ჟევანდროვი & მერზონი, 2000, [75].

2 ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის კლასიკური დასმით

2.1. განმარტებები და დამხმარე დებულებები

საყოველთაოდ მიღებულია ასოებით $\mathbb{R}$ და $\mathbb{C}$ აღინიშნოს, შესაბამისად, ნამდვილ რიცხვთა და კომპლექსურ რიცხვთა ველები. ასევე მიღებულია აღნიშვნა $\mathbb{N}$ მთელი დადებითი რიცხვების სიმრავლისათვის, ხოლო აღნიშვნა $\mathbb{N}_0$ მთელი არაუარყოფითი რიცხვების სიმრავლისათვის.

ტერმინი **წრფივი სივრცე** ან კიდევ **წრფივი ვექტორული სივრცე** $\mathfrak{L}$ კომპლექსურ (ან ნამდვილ) ვექტორულ ველზე მიანიშნებს ისეთ სიმრავლეს, სადაც ნებისმიერი ორი ელემენტისათვის $x, y \in \mathfrak{L}$ და ნებისმიერი ორი კომპლექსური $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ (ან, შესაბამისად, ნამდვილი) რიცხვისათვის $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), განმარტებულია ჯამი $\lambda x + \mu y \in \mathfrak{L}$; ეს ჯამი არის კომუტატიური $x+y = y+x$, ასოციატიური $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ და დისტრიბუციული $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$, $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$ $(x, y, z \in \mathfrak{L}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C})$. უფრო მეტიც, არსებობს **ნულოვანი ელემენტი** $0 \in \mathfrak{L}$, ისეთი რომ $x + 0 = x$ ნებისმიერი ელემენტისათვის $x \in \mathfrak{L}$.

მეტრიკული სივრცე $\mathfrak{B}$ ეწოდება ისეთ წრფივ სივრცეს, სადაც განმარტებულია **მანძილის ფუნქცია** $\rho \ : \ \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \to \mathbb{R}^+ := [0, \infty)$, რომელიც ასახავს წყვილებს $x, y \in \mathfrak{B}$ ნამდვილ არაუარყოფით რიცხვთა სიმრავლეში $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$ და გააჩნია შემდეგი თვისებები:

i. $\rho(x, y) = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც $x = y$;

ii. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

iii. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ ელემენტთა ნებისმიერი სამეულისათვის $x, y, z \in \mathfrak{B}$.

მიმდევრობას $\{x_j\}_{j=0}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ მეტრიკულ სივრცეში $\mathfrak{M}$ ეწოდება **კოშის მიმდევრობა**, თუ ნებისმიერი მცირე $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ რომ უტოლობა $\|x_j - x_k\| < \varepsilon$ შესრულდება ინდექსების ყველა წყვილისათვის $j, k > N_\varepsilon$.

სიმრავლეს (ქვესიმრავლეს) $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ მეტრიკულ სივრცეში $\mathfrak{M}$ ეწოდება **კომპაქტური**, თუ ამ სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილი ყოველი მიმდევრობიდან $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{N}$ შესაძლებელია ყოველთვის ამოვარჩიოთ კრებადი ქვემიმდევრობა $x_{j_k} \to x_0 \in \mathfrak{N}$ როდესაც $k \to \infty$.

სიმრავლეს (ქვესიმრავლეს) $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ მეტრიკულ სივრცეში $\mathfrak{M}$ ეწოდება **ფარდობითად კომპაქტური** თუ ამ სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილი ყოველი მიმდევრობიდან $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{N}$ შესაძლებელია ყოველთვის ამოვარჩიოთ კოშის ქვემიმდევრობა. ან კიდევ, სხვა სიტყვებით, ჩაკეტილი სიმრავლე $\overline{\mathfrak{N}}$, რომელიც გამდიდრებულია კოშის მიმდევრობების ზღვრებით, წარმოადგენს კომპაქტურ სიმრავლეს.

წრფივი ტოპოლოგიური სივრცეს $\mathfrak{B}$ (ან ქვესიმრავლეს $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}$) ეწოდება **ლოკალურად კომპაქტური**, თუ ყოველი შემოსაზღვრული სიმრავლე ამ სივრცეში $\mathfrak{B}$ (შესაბამისად, ამ სიმრავლეში $\mathfrak{M}$) არის ფარდობითად კომპაქტური.

მეტრიკულ სივრცეს $\mathfrak{M}$ ეწოდება **სრული**, თუ ნებისმიერი კოშის მომდევრობას ამ სივრცეში $\mathfrak{M}$ გააჩნია ზღვარი ამავე სივრცეში (ანუ, გაჩნია ზღვარი რომელიც ეკუთვნის ამავე სივრცეს $\mathfrak{M}$).

წრფივ მეტრიკულ სივრცეს $\mathfrak{B}$ ეწოდება **ნორმირებული** თუ მეტრიკა ამ სივრცეში არის ერთგვაროვანი და ინვარიანტული გადაადგილებების (წანაცვლებების) მიმართ:

$$\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\rho(x+z, y+z) \qquad \text{ყველა} \quad x, y, z \in \mathfrak{B}\,,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

მაშინ ფუნქციას

$$\|x\| = \|x\big|\mathfrak{B}\| := \rho(x, 0)$$

ეწოდება ელემენტის $x \in \mathfrak{B}$ **ნორმა** . ნორმას გააჩნია შემდეგი თვისებები: ელემენტების ნებისმიერი წყვილისათვის $x, y \in \mathfrak{B}$ და ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვისათვის $\lambda \in \mathbb{C}$ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

i. $\|x\| \geqslant 0$ და $\|x\| = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც $x = 0$.

ii. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;

iii. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (სამკუთხედის უტოლობა).

ბანახის სივრცე ეწოდება ნორმირებულ სივრცეს $\mathfrak{B}$ თუ ის სრულია.

ბანახის სივრცის უბრალო მაგრამ მნიშვნელოვანი მაგალითია **ევკლიდური სივრცე**: $\mathbb{R}^n$ რომელიც შედგება ვექტორული სვეტის ნამდვილი რიცხვების n-ეულებისაგან $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ (ზედა ინდექსი $^\top$ აღნიშნავს მატრიცის ტრანსპონირებას).

ღია სიმრავლე $\mathbb{R}^n$ ევკლიდურ სივრცეში მოიხსენება როგორც **არე**. სიმრავლე $\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \Omega$ წარმოადგენს Ω არის **საზღვარს**.

განვიხილოთ წრფივი სივრცე

$$\mathcal{H}^\mu(\Gamma) := \{\varphi \in \mathbb{C}_B(\Gamma)\ :\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant C\rho(x,y)^\mu \quad \forall x, y \in \Gamma\}\,. \tag{2.1}$$

სადაც $\mu \in (0, 1]$, ხოლო მუდმივი C დამოუკიდებელია წერტილებისაგან $x, y \in \Gamma$. ეს წრფივი სივრცე ნორმით

$$\|\varphi\big|\mathcal{H}^\mu(\Gamma)\| := \|\varphi\big|\mathbb{C}(\Gamma)\| + \sup_{x,y\in\Gamma} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{\rho(x,y)^\mu} \tag{2.2}$$

წარმოადგენს ბანახის სივრცეს.

პარამეტრის მნიშვნელობებისათვის $0 < \mu < 1$ ბანახის სივრცე $\mathcal{H}^\mu(\Gamma)$ ხშირად აღინიშნება აგრეთვე როგორც $C^\mu(\Gamma)$ და ცნობილი არიან როგორც **ჰელდერის სივრცეები** ხოლო სივრცე

$\mathcal{H}^1(\Gamma)$ მოიხსენება როგორც **ლიფშიცის სივრცე** და აღინიშნება როგორც $\mathrm{Lip}(\Gamma)$. ფუნქციებს ლიფშიცის სივრციდან $\varphi \in \mathrm{Lip}(\Gamma)$ ეწოდებათ **ლიფშიცის ფუნქციები** და ისინი აკმაყოფილებენ უტოლობას

$$\big|\varphi(x) - \varphi(y)\big| \leqslant M\rho(x,y) \qquad \text{ყველა} \quad x, y \in \Gamma \tag{2.3}$$

რაიმე მუდმივით $M > 0$, რომელსაც ეწოდება φ ფუნქციის **ლიფშიცის მუდმივი**.

წრფივი ოპერატორი $F \ : \ \mathfrak{L} \to \mathbb{C}$ რომელიც ასახავს წრფივ ვექტორულ სივრცეს $\mathfrak{L}$ კომპლექსური რიცხვების ველში $\mathbb{C}$ იწოდება **წრფივ ფუნქციონალად**. ხშირად მოხერხებულია ჩავწეროთ ფუნქციონალი $F(x)$, რომელიც მოქმედებს $x \in \mathfrak{L}$ ელემენტზე ბიწრფივი ფორმის სახით

$$F(x) = \langle F, x\rangle\,, \qquad x \in \mathfrak{L}\,, \quad F \in \mathfrak{L}^*\,. \tag{2.4}$$

თუ $\mathfrak{L}$ არის მეტრიკული, ბანახის ან ჰილბერტის სივრცე. ჩვენ შეგვიძლია განვმარტოთ **უწყვეტი წრფივი ფუნქციონალი** $F \ : \ \mathfrak{L} \to \mathbb{C}$ და მათი სიმრავლის აღსანიშნავად გამოვიყენოთ $\mathfrak{L}^* = \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathbb{C})$. სივრცეს $\mathfrak{L}^*$ ეწოდება $\mathfrak{L}$ სივრცის **დუალური** ან კიდევ **დუალური სივრცე**. თუ $\mathfrak{B}$ წარმოადგენს ბანახის სივრცეს ნორმით $\|\cdot\|$, ფუნქციონალის $F \in \mathfrak{B}^*$ უწყვეტობა განიმარტება უტოლობის საშუალებით

$$|\langle F, x\rangle| \le C\|x\| \qquad \forall\, x \in \mathfrak{B}\,. \tag{2.5}$$

წრფივი შემოსაზღვრული ოპერატორისათვის $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ ბანახის სივრცეებს შორის, $\operatorname{Ker} A_{\mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2}$ (ან კიდევ შემოკლებით, $\operatorname{Ker} A$) აღნიშნავს ოპერატორის ბირთვს

$$\operatorname{Ker} A_{\mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2} = \operatorname{Ker} A := \{x \in \mathfrak{B}_1 \ : \ Ax = 0\}\,.$$

რადგან ოპერატორი A წრფივი და უწყვეტი, მისი ბირთვი $\operatorname{Ker} A$ არის $\mathfrak{B}_1$ სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე.

$\Im\, A_{\mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2}$ (ან, შემოკლებით, $\Im\, A$) გამოიყენება **ოპერატორის ანასახის** აღნიშვნისათვის

$$\Im\, A_{\mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2} = \Im\, A := \big\{y \in \mathfrak{B}_2 \ : \ y = Ax \ \text{ რომელიმე } \ x \in \mathfrak{B}_1\big\}\,.$$

$\Im\, A$ წარმოადგენს წრფივ ქვესივრცეს სივრცეში $\mathfrak{B}_2$, მაგრამ შეიძლება იყოს არაჩაკეტილი სივრცეში $\mathfrak{B}_2$.

მოვიყვანოთ ევკლიდურ $\mathbb{R}^n$ სივრცეზე ბესელის პოტენციალთა $\mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^n)$ და სობოლევ-სლობოდეცკის $\mathbb{W}^s_p(\mathbb{R}^n)$ სივრცეების განმარტება. ამისათვის მოვიყვანოთ დამხმარე განმარტებები.

$\Omega \in \mathbb{R}^n$ არეზე განმარტებული $\varphi(x)$ ფუნქციის **სუპორტი** $\operatorname{supp}\varphi$ ის მინიმალური ჩაკეტილი სიმრავლეა, რომლის გარეთაც ფუნქცია იგივურად ნულია $\varphi(x) = 0$ ყველა $x \notin \ \operatorname{supp}\varphi$, ხოლო სიმრავლის შიგა წერტილებზე არ ნულდება $\varphi(x) \neq 0$ ყველა $x \in \ \operatorname{supp}\varphi \setminus \partial \operatorname{supp}\varphi$. $\mathbb{C}^0_\infty(\mathbb{R}^n)$ აღნიშნავს კომპაქტურ სუპორტიან უსასრულოდ გლუვ ფუნქციათა სიმრავლეს. დისტრიბუცია

წარმოადგენს ფუნქციონალს გლუვი ფუნქციების სივრცეზე, ანუ გლუვი ფუნქციების სივრცის დუალური (შეუღლებული) სივრცის ელემენტს. **შვარცის სივრცე** $\mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ წარმოადგენს სწრაფად ქრობადი გლუვი ფუნქციების სივრცეს, ხოლო მისი დუალური სივრცე შედგება წრფივი უწყვეტი ფუნქციონალებისაგან $\mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ სივრცეზე $F(\cdot) = \langle F, \cdot\rangle : \mathbb{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, აღინიშნება $\mathbb{S}'(\mathbb{R}^n)$ და ცნობილია როგორც ზომიერი დისტრიბუციების (განზოგადოებული ფუნქციების) სივრცე.

განსაზღვრება 2.1. *ვთქვათ, $1 \leq p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$. $\mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^n)$ აღნიშნავს ბესელის პოტენციალთა სივრცეს და განიმარტება როგორც შვარცის დისტრიბუციათა $\mathbb{S}'(\mathbb{R}^n)$ სივრცის ქვესივრცე, რომელიც აღჭურვილია ნორმით (იხ. ტრიბელი, 1995, [70])*

$$||u\big|\mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^n)|| := ||\langle D\rangle^s u\big|L_p(\mathbb{R}^n)||,$$

სადაც $\langle D\rangle^s := \mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}$ არის ბესელის პოტენციალი და $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}$ წარმოადგენენ ფურიეს გარდაქმნებს განმარტებულს შესაბამისად:

$$\mathcal{F}u(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x}u(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

არის ფურიეს გარდაქმნა და

$$\mathcal{F}^{-1}v(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x}v(\xi)d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

არის ფურიეს შებრუნებული გარდაქმნა, ე.ი. $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}u = u, \quad \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}v = v$.

განსაზღვრება 2.2. *ვთქვათ, $1 \leq p \leq \infty$, $s \in \mathbb{N}_0$. $\mathbb{W}^s_p(\mathbb{R}^n)$ აღნიშნავს სობოლევis სივრცეს, რომელიც შედგება ისეთი ფუნქციებისაგან $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$ სივრციდან, რომლებსაც აქვთ წარმოებულები (დისტრიბუციების აზრით) s-რიგამდე ამავე $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$ სივრცეში. ნორმა ასეთ სივრცეში მოიცემა ბუნებრივი ტოლობით*

$$||u\big|\mathbb{W}^s_p(\mathbb{R}^n)|| := \sum_{|\alpha|\leqslant s} ||\partial^\alpha u\big|L_p(\mathbb{R}^n)||.$$

როდესაც $1 \leq p < \infty$ და სტანდარტული sup-ნორმის მოდიფიკაციით, როდესაც $p = \infty$

$$||u\big|\mathbb{W}^s_\infty(\mathbb{R}^n)|| := \sum_{|\alpha|\leqslant s} sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha u(x)|.$$

შევნიშნოთ, რომ როდესაც $s = 1, 2...$ არის არაუარყოფითი და მთელი რიცხვი, ბესელის პოტენციალთა $\mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^n)$ და სობოლევის $\mathbb{W}^s_p(\mathbb{R}^n)$ სივრცეები ერთმანეთს ემთხვევა.

ჩვენ ასევე დაგვჭირდება ჰიპერზედაპირის განმარტება. არსებობს ევკლიდურ $\mathbb{R}^n$ სივრცეში მოცემული $\mathcal{S}$ ზედაპირის (ჰიპერზედაპირის) მრავალი განმარტება. შემდეგი განმარტებები ექვივალენტურია და გამოიყენება უფრო ზოგადი ობიექტის, მრავალსახეობის განმარტებისას.

განსაზღვრება 2.3. *$\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ ევკლიდური სივრცის ქვესიმრავლეს ეწოდება* ***ჰიპერზედაპირი,*** *თუ მას აქვს დამფარავი $\mathcal{S} = \bigcup_{j=1}^M \mathcal{S}_j$ და საკოორდინატო ასახვები*

$$\Theta_j : \omega_j \to \mathcal{S}_j := \Theta_j(\omega_j) \subset \mathbb{R}^n, \qquad \omega_j \subset \mathbb{R}^{n-1}, \quad j = 1, \ldots, M, \tag{2.6}$$

ისეთი, რომ შესაბამის დიფერენციალებს

$$D\Theta_j(p) := \operatorname{matr}\left[\partial_1\Theta_j(p), \ldots, \partial_{n-1}\Theta_j(p)\right], \tag{2.7}$$

აქვთ სრული რანგი

$$\operatorname{rank} D\Theta_j(p) = n - 1\,, \qquad \forall p \in Y_j\,, \quad k = 1, \ldots, n\,, \quad j = 1, \ldots, M\,,$$

ე.ი. ω_j*-ს ყველა წერტილი რეგულარულია* Θ_j*-სთვის ყველა* $j = 1, \ldots, M$*-სთვის.*

ასეთ ასახვას ეწოდება **იმერსია**.

აქ და შემდგომშიც $\operatorname{matr}[x_1, \ldots, x_k]$ აღნიშნავს ვექტორ-სვეტებისგან $x_1, \ldots, x_k$ შედგენილ მატრიცას.

ჰიპერზედაპირს ეწოდება **გლუვი**, თუ (2.6)-ში შესაბამისი კოორდინატთა დიფეომორფიზმები Θ_j არიან გლუვი (C^∞-გლუვი). მსგავსად განიმარტება μ**-გლუვი** ჰიპერზედაპირი.

ჰიპერზედაპირის შემდეგ განმარტებას ეწოდება **არაცხადი**.

განსაზღვრება 2.4. *ვთქვათ,* $k \geqslant 1$ *და* $\omega \subset \mathbb{R}^n$ *არიან კომპაქტური არეები. არაცხადი* C^k*-გლუვი ჰიპერზედაპირი* $\mathbb{R}^n$*-ში განიმარტება როგორც სიმრავლე*

$$\mathcal{S} = \left\{\mathcal{x} \in \omega \ : \ \Psi_{\mathcal{S}}(\mathcal{x}) = 0\right\}, \tag{2.8}$$

სადაც $\Psi_{\mathcal{S}} : \omega \to \mathbb{R}$ *არის* C^k*-ასახვა, რომელსაც აქვს არა-ქრობადი გრადიენტი* $\nabla\,\Psi(\mathcal{x}) \neq 0$.

ყველაზე მნიშვნელოვანი როლი მხები დიფერენციალური ოპერატორების აღრიცხვაში რომელსაც ჩვენ გამოვიყენებთ არის ერთეულოვანი ნორმალური ვექტორული ველი $\boldsymbol{\nu}(y)$, $t \in \mathcal{C}$. ზედაპირის $\mathcal{C}$ **ერთეულოვანი ნორმალური ვექტორული ველი**, ასევე ცნობილი, როგორც **გაუსის ასახვა**, განიმარტება კოვარიანტული ბაზისების ვექტორული ნამრავლით

$$\boldsymbol{\nu}(\mathcal{x}) := \pm\frac{\boldsymbol{g}_1(\mathcal{X}) \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{g}_{n-1}(\mathcal{X})}{|\boldsymbol{g}_1(\mathcal{X}) \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{g}_{n-1}(\mathcal{X})|}, \qquad \mathcal{X} \in \mathcal{C}. \tag{2.9}$$

მხები ვექტორების სისტემა $\{\boldsymbol{g}_k\}_{k=1}^{n-1}$ $\mathcal{C}$-ში, განმარტების თანახმად, წრფივად დამოუკიდებელია და ცნობილია, როგორც **კოვარიანტული ბაზისი**. არსებობს ერთადერთი სისტემა $\left\{\boldsymbol{g}^k\right\}_{k=1}^{n-1}$, რომელიც ბიორთოგონალურია მისი - **კონტრავარიანტული ბაზისი**:

$$\langle \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^k\rangle = \delta_{jk} \qquad j, k = 1, \ldots, n-1.$$

კონტრავარიანტული ბაზისი განიმარტება ფორმულით:

$$\boldsymbol{g}^k = \frac{1}{\det\, G_{\mathcal{S}}}\boldsymbol{g}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{g}_{k-1} \wedge \boldsymbol{\nu} \wedge \boldsymbol{g}_{k+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{g}_{n-1}, \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{2.10}$$

სადაც

$$G_{\mathcal{S}}(\mathcal{x}) := [\langle \boldsymbol{g}_k(\mathcal{x}), \boldsymbol{g}_m(\mathcal{x})\rangle]_{n-1\times n-1}, \qquad p \in \mathcal{S}$$

არის **გრამის მატრიცი**.

ვიტყვით, რომ ზედაპირი (არის საზღვარი) **გლუვია**, თუ ზედაპირის წარმომქმნელი ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია.

წირი გლუვ $\mathcal{C}$ ზედაპირზე არის

$$\gamma \ : \ \mathcal{I} \mapsto \mathcal{C}\,, \qquad \mathcal{I} := (a,b] \subset \mathbb{R}\,,$$

$\mathcal{I}$ ინტერვალის ასახვა $\mathcal{C}$-ში.

ვექტორული ველი $\mathbb{R}^n$-ის Ω არეზე არის ასახვა

$$\boldsymbol{U} \ : \ \Omega \to \mathbb{R}^n\,, \qquad \boldsymbol{U}(x) = \sum_{j=1}^{n} U_j(x)\boldsymbol{e}^j\,,$$

სადაც $U^j \in C_0^\infty(\Omega)$ და $\boldsymbol{e}^j$ არის ბუნებრივი კარტეზიანული ბაზისის ელემენტი $\mathbb{R}^n$-ში

$$e^1 := (1,0,\dots,0),\dots,e^n := (0,\dots,0,1).$$

$\mathcal{V}(\Omega)$-თი აღვნიშნავთ ყველა გლუვი ვექტორული ველის სიმრავლეს Ω არეზე.

ვექტორული ველი $\boldsymbol{U} \in \mathcal{V}(\Omega)$ განსაზღვრავს **პირველი რიგის დიფერენციალურ ოპერატორს**

$$\boldsymbol{U}f(x) = \partial_{\boldsymbol{U}}f(x) := \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\mathcal{F}^h_{\boldsymbol{U}}(x)\right) - f(x)}{h} = \frac{d}{dt}\,f\left(\mathcal{F}^t_{\boldsymbol{U}}(x)\right)\Big|_{t=0}\,,$$

სადაც $\mathcal{F}^t_{\boldsymbol{U}}(x)$ არის U ვექტორული ველის ორბიტა.

ვთქვათ

$$P(D)u = \sum_{j=1}^{n} a_j\partial_j u + bu\,, \qquad a_j, b \in C^1(\mathbb{R}^{m\times m}) \tag{2.11}$$

არის პირველი რიგის დიფერენციალური ოპერატორი ნამდილი მნიშვნელობიანი მატრიც-კოეფიციენტებით, რომელიც მოქმედებს ფუნქციებზე, რომლის მნიშვნელობები ვექტორებია, $\mathbb{R}^n$ სივრცეში და მისი **მთავარი სიმბოლო** მოცემულია ფუნქციით, რომლის მნიშვნელობა მატრიცაა

$$\sigma(P;\xi) := \sum_{j=1}^{n} a_j\xi_j \qquad \xi = \left\{\xi_j\right\}_{j=1}^{n} \in \mathbb{R}^n\,. \tag{2.12}$$

იმისათვის, რომ განვასხვავოთ ღია და ჩაკეტილი ჰიპერზედაპირები, გამოვიყენებთ აღნიშვნას $\mathcal{S}$ ჩაკეტილი ჰიპერზედაპირისათვის საზღვრის გარეშე $\partial\mathcal{S} = \emptyset$ (შეგახსენებთ, რომ აღნიშვნა $\mathcal{C}$ გამოყენებულია ღია ჰიპერზედაპირისათვის საზღვრით $\Gamma := \partial\mathcal{S}$).

განსაზღვრება 2.5. *ვიტყვით, რომ P არის $\mathcal{S}$ ჰიპრზედაპირის* მხები ოპერატორი *ერთეულოვანი ნორმალით $\boldsymbol{\nu}$, თუ*

$$\sigma(P;\boldsymbol{\nu}) = 0, \quad \mathcal{S} \quad \textit{ჰიპერზედაპირზე.} \tag{2.13}$$

გიუნტერის წარმოებულები წარმოადგენს მხები დიფერენციალური ოპერატორების მარტივ მაგალითს

$$\mathcal{D}_j := \partial_j - \nu_j \partial_\nu = \partial_j - \nu_j \sum_{k=1}^{n} \nu_k \partial_k \,.$$

მოვიყვანოთ ზედაპირული დივერგენციის $\mathrm{div}_{\mathcal{S}}$, ზედაპირული გრადიენტის $\nabla_{\mathcal{S}}$, ზედაპირის ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორის $\Delta_{\mathcal{S}}$ და ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორის $\Delta^2_{\mathcal{S}}$ განმარტებები.

კლასიკური დიფერენციალური გეომეტრიის თანახმად, $f \in C^1(\mathcal{S})$ ფუნქციის **ზედაპირული გრადიენტი** $\nabla_{\mathcal{S}}$ განიმარტება შემდეგნაირად

$$\nabla_{\mathcal{S}} f = \mathrm{grad}\, f = \sum_{j,k} (g^{jk} \partial_j f)\, \partial/\partial x_k,$$

და გლუვი მხები ვექტორული ველის **ზედაპირული დივერგენცია** განიმარტება შემდეგნაირად

$$\mathrm{div}_{\mathcal{S}} \boldsymbol{V} := \sum_{k=1}^{n-1} V^j_{;j}\,, \qquad V^j_{;k} := \partial_k V^j + \sum_{m=1}^{n-1} \Gamma^j_{km} V^m,$$

სადაც Γ^j_{km} აღნიშნავს **კრისტოფელის სიმბოლოს**

$$\Gamma^j_{km} := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} g^{j\ell} \left[\partial_m g_{k\ell} + \partial_k g_{m\ell} - \partial_\ell g_{km}\right] = \Gamma^j_{mk}$$

და $G := [g_{jk}]$ არის კოვარიანტული რიმანის მეტრიკული ტენზორი მაშინ, როცა $G^{-1} := [g^{jk}]$ არის მისი ინვერსია - კონტრავარიანტული რიმანის მეტრიკული ტენზორი.

$\mathrm{div}_{\mathcal{S}}$ არის ზედაპირული გრადიენტის უარყოფითად დუალური:

$$\langle \mathrm{div}_{\mathcal{S}} \boldsymbol{V}, f \rangle := -\langle \boldsymbol{V}, \nabla_{\mathcal{S}} f \rangle\,, \qquad \forall\, \boldsymbol{V} \in \mathcal{V}(\mathcal{S})\,, \quad \forall\, f \in C^1(\mathcal{S})\,.$$

ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორი $\Delta_{\mathcal{S}}$ on $\mathcal{S}$ განმარტებულია, როგორც კომპოზიცია

$$\boldsymbol{\Delta}_{\mathcal{S}}\, \psi = \mathrm{div}_{\mathcal{S}} \nabla_{\mathcal{S}}\, \psi = -\nabla^*_{\mathcal{S}} \left(\nabla_{\mathcal{S}} \psi \right), \tag{2.14}$$

ხოლო ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორის განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\boldsymbol{\Delta^2}_{\mathcal{S}}\, \psi = (\Delta_{\mathcal{S}}\, \Delta_{\mathcal{S}})\, \psi = (\mathrm{div}_{\mathcal{S}} \nabla_{\mathcal{S}})^2\, \psi\,. \tag{2.15}$$

კლასიკური დიფერენციალური გეომეტრიისგან განსხვავებით ზედაპირული გრადიენტი, ზედაპირული დივერგენცია, ზედაპირული ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორი $\Delta_{\mathcal{S}}$ და ზედაპირული ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორი $\Delta^2_{\mathcal{S}}$ განმარტებულნი არიან გიუნტერის წარმოებულებით უფრო მარტივად, ნორმალური ვექტორული ველის ν დახმარებით მაშინ, როდესაც კლასიკურ

დიფერენციალურ გეომეტრიაში მათი განმარტებები დამყარებულია კრისტოფელის სიმბოლოზე Γ^j_{km}, კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ $G^{-1} := [g^{jk}]$ რიმანის მეტრიკულ ტენზორებზე და საკმაოდ რთულია.

ზედაპირული დივერგენცია $\mathrm{div}_{\mathcal{S}}$ და ზედაპირული გრადიენტი $\nabla_{\mathcal{S}}$ განიმარტება შემდეგნაირად

$$\mathrm{div}_{\mathcal{S}}\mathrm{U} = \sum_{k=1}^{n} \partial_k U_k, \qquad \nabla_{\mathcal{S}}\varphi := (\mathcal{D}_1\varphi, \dots, \mathcal{D}_n\varphi_n)^\top, \qquad \mathrm{U} := (U_1, \dots, U_n)^\top$$

და ზედაპირის ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორი $\Delta_{\mathcal{S}}$ წარმოადგენს მათ სუპერპოზიციას

$$\Delta_{\mathcal{S}}\,\psi = \mathrm{div}_{\mathcal{S}}\nabla_{\mathcal{S}}\,\psi = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{D}_j^2\psi, \tag{2.16}$$

ხოლო ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორი განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\Delta^2{}_{\mathcal{S}}\,\psi := \sum_{j,k=1}^{n} \mathcal{D}_j^2\mathcal{D}_k^2\,\psi. \tag{2.17}$$

მოვიყვანოთ დამხმარე დებულებები:

ვთქვათ, $\mathcal{S}$ არის ჩაკეტილი ჰიპერზედაპირი $\mathbb{R}^n$-ში და $\mathcal{C}$ არის $\mathcal{S}$-ს გლუვი ქვეზედაპირი, მოცემული იმერსიით

$$\Theta\,:\,\omega \to \mathcal{C}\,, \qquad \omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

საზღვრით $\Gamma = \partial\mathcal{C}$, მოცემული სხვა იმერსიით

$$\Theta_\Gamma\,:\,\omega \to \Gamma := \partial\mathcal{C}\,, \qquad \omega \subset \mathbb{R}^{n-2}\,,$$

$\boldsymbol{\nu}(x)$ არის $\mathcal{C}$-ის გარე ერთეულოვანი ნორმალური ვექტორული ველი, $\mathcal{N}(x)$ აღნიშნავს გაგრძელებულ ერთეულოვან ველს $\mathcal{C}$ ზედაპირის $\omega_{\mathcal{C}}$ მიდამოში. $\boldsymbol{\nu}_\Gamma(t)$ არის Γ საზღვრის გარე ნორმალური ვექტორული ველი, რომელის წარმოადგენს $\mathcal{C}$-ის მხებს.

ლემა 2.6. *ვთქვათ P არის, როგორც (2.11)-ში, პირველი რიგის დიფერენციალური ოპერატორი C^1-გლუვი კოეფიციენტებით. P არის მხები მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ P^* არის შეუღლებული ოპერატორი.*

თუ P არის $\mathcal{S}$-ის მხები და განმარტებულია $\mathcal{S}$-ის მახლობლობაში, მაშინ

$$(P\varphi)\Big|_{\mathcal{S}} = P\Big(\varphi|_{\mathcal{S}}\Big)$$

ყოველი C^1 ფუნქციისთვის φ განსაზღვრული $\mathcal{S}$-ის მიდამოში.

ლემა 2.7 (იხ. დუდუჩავა, 2006, [32]). *ნებისმიერი ფუნქციისთვის $\varphi \in C^1(\mathcal{S})$ გვაქვს*

$$\nabla_{\mathcal{S}}\varphi = \Big\{\mathcal{D}_1\varphi, \mathcal{D}_2\varphi, ..., \mathcal{D}_n\varphi\Big\}^\top. \tag{2.18}$$

აგრეთვე, 1-გლუვი მხები ვექტორული ველისთვის $\boldsymbol{V}=\sum_{j=1}^{n} V^j e_j \in \mathcal{V}(\mathcal{S})$,

$$\operatorname{div}_{\mathcal{S}} \boldsymbol{V} = -\nabla_{\mathcal{S}}^{*} \boldsymbol{V} := \sum_{j=1}^{n} \mathcal{D}_j V^j, \tag{2.19}$$

ხოლო ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორი $\boldsymbol{\Delta}_{\mathcal{S}}$ $\mathcal{S}$*-ზე მიიღებს სახეს*

$$\boldsymbol{\Delta}_{\mathcal{S}}\,\psi = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{D}_j^2 \psi = \sum_{j<k} \mathcal{M}_{jk}^2 \psi = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \mathcal{M}_{jk}^2 \psi \qquad \forall\,\psi \in C^2(\mathcal{S})\,. \tag{2.20}$$

ლემა 2.8 (იხ. დუდუჩავა, 2006, [32]). *ვთქვათ* $\mathcal{S}$ *არის გლუვი ჩაკეტილი ჰიპერზედაპირი. ერთგვაროვან განტოლებას*

$$\boldsymbol{\Delta}_{\mathcal{S}}\,\psi = 0 \tag{2.21}$$

აქვს მხოლოდ მუდმივი ამონახსნი $\mathbb{W}^1(\mathcal{S})$ *სივრცეში.*

დამტკიცება: (2.14) და (2.21) თანახმად მივიღებთ

$$0 = \boldsymbol{(}-\boldsymbol{\Delta}_{\mathcal{S}}\psi, \psi\boldsymbol{)} = \boldsymbol{(}\nabla_{\mathcal{S}}\psi, \nabla_{\mathcal{S}}\psi\boldsymbol{)} = \|\nabla_{\mathcal{S}}\psi\big|\mathbb{L}_2(\mathcal{S})\|,$$

რომელიც გვაძლევს, რომ $\nabla_{\mathcal{S}}\psi = 0$. მაგრამ მარტივად ზედაპირული გრადიენტი ნიშნავს მუდმივ ფუნქციას $\psi = \mathrm{const}$ (ეს ადვილი საჩვენებლია გიუნტერის წარმოებულის განმარტებიდან გამომდინარე, მაგ. იხილეთ სტატია დუდუჩავა, 2009, [23]). $\square$

ლემა 2.9. *ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორი* $\Delta_{\mathcal{S}}^2\varphi := (div_{\mathcal{S}}\nabla_{\mathcal{S}})^2\varphi : \mathbb{H}^2(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{-2}(\mathcal{S})$ *არის ელიფსური, თვითშეუღლებული* $(\Delta_{\mathcal{S}}^2)^* = \Delta_{\mathcal{S}}^2$*, არაუარყოფითი ოპერატორი*

$$(\Delta_{\mathcal{S}}^2\varphi, \varphi) = (\Delta_{\mathcal{S}}\varphi, \Delta_{\mathcal{S}}\varphi) = \|\Delta_{\mathcal{S}}\varphi\big|\mathbb{L}_2(\mathcal{S})\|^2 \geq 0, \qquad \varphi \in \mathbb{H}^2(\mathcal{S}) \tag{2.22}$$

და ერთგვაროვან განტოლებას აქვს მხოლოდ მუდმივი ამონახსნი

$$(\Delta_{\mathcal{S}}^2\varphi, \varphi) = 0, \qquad \textit{მხოლოდ მაშინ, როცა} \qquad \varphi = const. \tag{2.23}$$

დამტკიცება: $\Delta_{\mathcal{S}}^2$ არის ელიფსური და თვითშეუღლებული, რადგან $\Delta_{\mathcal{S}}$ არის ელიფსური და თვითშეუღლებული (იხ. დუდუჩავა, 2009, [23]).

(2.15) და (2.23) თანახმად მივიღებთ

$$0 = \left(\Delta_{\mathcal{S}}^2\varphi, \varphi\right) = (\Delta_{\mathcal{S}}\varphi, \Delta_{\mathcal{S}}\varphi) = \|\Delta_{\mathcal{S}}\varphi\big|\mathbb{L}_2(\mathcal{S})\|^2$$

რომელიც გვაძლევს, რომ $\Delta_{\mathcal{S}}\varphi = 0$ და, მაშასადამე, $\varphi = \mathrm{const}$. $\square$

ვთქვათ, $\mathcal{M}$ არის არატრივიალური $\operatorname{mes}\mathcal{M} \neq \emptyset$, გლუვი ჩაკეტილი ჰიპერზედაპირი, $s \in \mathbb{R}$ და $1 < p < \infty$. ბესელის პოტენციალთა $\mathbb{H}_p^s(\mathcal{M})$ და სობოლევ-სლობოდეცკის $\mathbb{W}_p^s(\mathcal{M})$ სივრცეების

განმარტებები ჩაკეტილი გლუვი მრავალსახეობისთვის $\mathcal{M}$ წარმოდგენილია ტრიბელის, 1995, [70] (არეთვე იხ. დუდუჩავა, 2001; ჰორმანდერი, 1983; სიაო & ვენდლანდი, 2008, [22, 44, 45]) სტატიებში. $p = 2$-სთვის სობოლებ-სლობოდეცკის $\mathbb{W}^s(\mathcal{M}) := \mathbb{W}^s_2(\mathcal{M})$ და ბესელის პოტენციალთა სივრცეები $\mathbb{H}^s(\mathcal{M}) := \mathbb{H}^s_2(\mathcal{M})$ ემთხვევა ერთმანეთს (ე.ი ნორმები ექვივალენურია).

ვთქვათ, $\mathcal{C}$ არის გლუვი ჩაკეტილი ზედაპირის $\mathcal{M}$ ქვეზედაპირი $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ გლუვი საზღვრით $\Gamma := \partial\mathcal{C}$. სივრე $\widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathcal{C})$ განმარტებულია როგორც ისეთი $\varphi \in \mathbb{H}^s_p(\mathcal{M})$ ფუნქციების ქვესივრცე, რომლებიც შეყურსულნი არიან ქვეზედაპირის ჩაკეტვაში, $\mathrm{supp}\varphi \subset \overline{\mathcal{C}}$, სადაც $\mathbb{H}^s_p(\mathcal{C})$ აღნიშნავს ფაქტორ-სივრცეს $\mathbb{H}^s_p(\mathcal{C}) = \mathbb{H}^s_p(\mathcal{M})\Big/\widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathcal{C}^c)$ და $\mathcal{C}^c := \mathcal{M} \setminus \overline{\mathcal{C}}$ არის $\mathcal{C}$ ზედაპირის დამატებითი ქვეზედაპირი. $\mathbb{H}^s_p(\mathcal{C})$ სივრცე შეიძლება გავაიგივოთ φ დისტრიბუციების სივრცესთან $\mathcal{C}$-ზე, რომელთაც აქვთ გაგრძელება $\ell\varphi \in \mathbb{H}^s_p(\mathcal{M})$ დისტრიბუციებამდე. ამიტომაც $r_{\mathcal{C}}\mathbb{H}^s_p(\mathcal{M}) = \mathbb{H}^s_p(\mathcal{C})$, სადაც $r_{\mathcal{C}}$ აღნიშნავს ფუნქციების (დისტრიბუციების) შემზღუდავ ოპერატორს $\mathcal{M}$ ზედაპირიდან $\mathcal{C}$ ზედაპირამდე.

$\widetilde{\mathbb{W}}^s_p(\mathcal{C})$ და $\mathbb{W}^s_p(\mathcal{C})$ სივრცეები განიმარტება მსგავსად (იხ. ტრიბელი, 1995, [70] და აგრეთვე დუდუჩავა, 2001; ჰორმანდერი, 1983; სიაო & ვენდლანდი, 2008, [22, 44, 45]).

$\mathbb{X}^s_p(\mathcal{C})$-ით აღვნიშნავთ ერთერთს შემდეგი სივრცეებიდან: $\mathbb{H}^s_p(\mathcal{C})$ ან $\mathbb{W}^s_p(\mathcal{C})$ და $\widetilde{\mathbb{X}}^s_p(\mathcal{C})$-ით აღვნიშნავთ ერთერთს შემდეგი სივრცეებიდან: $\widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathcal{C})$ და $\widetilde{\mathbb{W}}^s_p(\mathcal{C})$ (თუ $\mathcal{C}$ ღიაა).

განვიხილოთ სივრცე

$$\mathbb{X}^s_{p,\#}(\mathcal{M}) := \{\varphi \in \mathbb{X}^s_2(\mathcal{M}) \ : \ (\!(\varphi, 1)\!) = 0\}\,. \tag{2.24}$$

ცხადია, რომ $\mathbb{X}^s_{p,\#}(\mathcal{M})$ არ შეიცავს მუდმივებს: თუ $c_0 = \mathrm{const} \in \mathbb{X}^s_{p,\#}(\mathcal{M})$, მაშინ

$$0 = (\!(c_0, 1)\!) = c_0(\!(1, 1)\!) = c_0 \mathrm{mes}\,\mathcal{M}$$

და $c_0 = 0$. უფრო მეტიც, $\mathbb{X}^s_p(\mathcal{M})$ დაიყოფა პირდაპირ ჯამად

$$\mathbb{X}^s_p(\mathcal{M}) = \mathbb{X}^s_{p,\#}(\mathcal{M}) + \{\mathrm{const}\} \tag{2.25}$$

და დუალური სივრცე არის

$$(\mathbb{X}^s_{p,\#}(\mathcal{M}))^* = \mathbb{X}^{-s}_{p',\#}(\mathcal{M}), \qquad p' := \frac{p}{p-1}. \tag{2.26}$$

სინამდვილეში, (2.25) დაყოფა გამომდინარეობს წარმოდგენიდან

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_{\mathrm{aver}}, \qquad \varphi_0 \in \mathbb{X}^s_{p,\#}(\mathcal{M}), \qquad \varphi_{\mathrm{aver}} := \frac{1}{\mathrm{mes}\,\mathcal{M}}(\!(\varphi, 1)\!). \tag{2.27}$$

ნებისმიერი ფუნქციისთვის $\varphi \in \mathbb{X}^s_p(\mathcal{M})$, ვინაიდან $(\varphi_0)_{\mathrm{aver}} = (\varphi - \varphi_{\mathrm{aver}})_{\mathrm{aver}} = 0$.

ვინაიდან სობოლევის სივრცე $\mathbb{W}^m_{p,\#}(\mathcal{M})$ მთელი სიგლუვის $m = 1, 2, \dots$ პარამეტრით არ შეიცავს მუდმივებს, შედეგი 2.8-ის თანახმად ამ სივრცეში ექვივალენტური ნორმა შეიძლება

განიმარტოს შემდეგნაირად:

$$\left\|\varphi\middle|\mathbb{W}^m_{p,\#}(\mathcal{M})\right\|_0 := \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}\left\|\mathcal{D}^\alpha\varphi\middle|\mathbb{L}_p(\mathcal{M})\right\|. \tag{2.28}$$

კერძოდ, $\mathbb{W}^1_{p,\#}(\mathcal{M})$ სივრცეში ექვივალენტური ნორმა არის

$$\left\|\varphi\middle|\mathbb{W}^1_{p,\#}(\mathcal{M})\right\|_0 := \left\|\nabla_{\mathcal{S}}\varphi\middle|\mathbb{L}_p(\mathcal{M})\right\|. \tag{2.29}$$

დუალური სივრცის აღწერა (2.26) გამომდინარეობს იქიდან, რომ $\mathbb{X}^s_p(\mathcal{M})$ სივრცის დუალური სივრცეა $\mathbb{X}^{-s}_{p'}(\mathcal{M})$ (იხ. ტრიბელი, 1995, [70]) და, ამიტომ, (2.25) დეკომპოზიციისა და ჰანი-ბანახის თეორემის თანახმად $\mathbb{X}^s_{p,\#}(\mathcal{M})$ სივრცის დუალური სივრცე ჩადგმულია $\mathbb{X}^{-s}_{p'}(\mathcal{M})$ სივრცეში. ფუნქციონალი $\mathbb{X}^{-s}_{p'}(\mathcal{M})$-დან რომელიც ქრება მთელ სივრცეზე $\mathbb{X}^s_{p,\#}(\mathcal{M})$ არის მხოლოდ მუდმივი $1 \in \mathbb{X}^{-s}_{p'}(\mathcal{M})$ (იხ. განმარტება (2.24)). ამ ფუნქციონალის გამორიცხვის შემდეგ დარჩენილი სივრცე, (2.25)-ის თანახმად, ემთხვევა სივრცეს $\mathbb{X}^{-s}_{p',\#}(\mathcal{M})$, რომელიც დუალურია $\mathbb{X}^s_{p,\#}(\mathcal{M})$ სივრცის.

თეორემა 2.10. *ვთქვათ $\mathcal{S}$ არის ℓ-გლუვი $\ell = 1, 2, \ldots$, $1 < p < \infty$ და $|s| \leqslant \ell$. ვთქვათ $\mathbb{X}^s_p(\mathcal{S})$ არის იგივე, რაც* (2.24)-(2.26).

ვთქვათ $\mathcal{H} \in C^{\ell-1}(\mathbb{R}^n)$ აქვს ერთერთი შემდეგი თვისებებიდან:

i. *$\mathcal{H}$ გააჩნია არა-უარყოფითი ნამდვილი ნაწილი $\operatorname{Re}\mathcal{H}(t) \geqslant 0$ ყველა $t \in \mathcal{S}$-სთვის და $\operatorname{mes}\operatorname{supp}\operatorname{Re}\mathcal{H} \neq 0$;*

ii. *$\mathcal{H}$ გააჩნია მუდმივი კომპლექსური ნაწილი $\operatorname{Im}\mathcal{H}(t) = \mathrm{const} \neq 0$;*

iii. *$\operatorname{Re}\mathcal{H} = 0$, $\operatorname{mes}\operatorname{supp}\operatorname{Im}\mathcal{H} \neq 0$ და კომპლექსური ნაწილი $\operatorname{Im}\mathcal{H}$ არ იცვლის ნიშანს: ან $\operatorname{Im}\mathcal{H}(t) \geqslant 0$ ყველა $t \in \mathcal{S}$-სთვის ან $\operatorname{Im}\mathcal{H}(t) \leqslant 0$ ყველა $t \in \mathcal{S}$-სთვის;*

შეშფოთებული ოპერატორი

$$\operatorname{div}_{\mathcal{S}}A\,\nabla_{\mathcal{S}} - \mathcal{H}I \;:\; \mathbb{X}^{s+1}_p(\mathcal{S}) \to \mathbb{X}^{s-1}_p(\mathcal{S}) \tag{2.30}$$

არის შებრუნებადი, რომელიც შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც $\operatorname{div}_{\mathcal{S}}A\,\nabla_{\mathcal{S}} - \mathcal{H}I$ ოპერატორის ფუნდამენტური ამონახსნის არსებობა.

ოპერატორი $\operatorname{div}_{\mathcal{S}}A\,\nabla_{\mathcal{S}}$ თავის მხრივ შებრუნებადია სივრცეებს შორის მუდმივების გარეშე (იხ. (2.24)*)*

$$\operatorname{div}_{\mathcal{S}}A\,\nabla_{\mathcal{S}} \;:\; \mathbb{X}^{s+1}_{p,\#}(\mathcal{S}) \to \mathbb{X}^{s-1}_{p,\#}(\mathcal{S}). \tag{2.31}$$

და ამიტომ $\operatorname{div}_{\mathcal{S}}A\,\nabla_{\mathcal{S}}$ გააჩნია ფუნდამენტური ამონახსნი (2.31) *დასმით.*

დამტკიცება: თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია სტატიაში [23, თეორემა 7.1] მხოლოდ შემდეგი დასმით $\mathbb{W}^1(\mathcal{S}) \to \mathbb{W}^{-1}(\mathcal{S})$. ამიტომ, ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ ზოგადად.

უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ (2.30)-ში მოცემული ოპერატორი შემოსაზღვრული და ელიფსურია. როგორც ელიფსური ოპერატორი ჩაკეტილ ჰიპერზედაპირზე $\operatorname{div}_{\mathcal{S}} A\, \nabla_{\mathcal{S}} - \mathcal{H} I$ არის ფრედჰოლმის ყველა $s \in \mathbb{R}$ და $1 < p < \infty$-სთვის (მას აქვს პარამეტრიქსი, თუ $\mathcal{S}$ არის უსასრულოდ გლუვი, იხ. ჰორმანდერი, 1983; შუბინი, 1987; ტეილორი, 1981, [44, 65, 68]). მეორეს მხრივ,

$$\begin{aligned}(-(\operatorname{div}_{\mathcal{S}} A\, \nabla_{\mathcal{S}} - \mathcal{H})\varphi, \varphi)_{L_2(\mathcal{S})} = -\int_\Gamma \langle(\boldsymbol{\nu}_\Gamma, A\, \nabla_{\mathcal{S}}\varphi)^+, \varphi^+\rangle ds \qquad (2.32)\\ +\boldsymbol{(}A\nabla_{\mathcal{S}}\varphi, \nabla_{\mathcal{S}}\varphi\boldsymbol{)}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{(}\operatorname{Re}\mathcal{H}\varphi, \varphi\boldsymbol{)}_{\mathcal{S}} + i\boldsymbol{(}\operatorname{Im}\mathcal{H}\varphi, \varphi\boldsymbol{)}_{\mathcal{S}} \qquad \forall\, \varphi \in \mathbb{W}^1_2(\mathcal{S}).\end{aligned}$$

დავამტკიცოთ ამონახსნის ერთადერთობა. ამისათვის განვიხილოთ ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები: $f = 0, (\boldsymbol{\nu}_\Gamma, A\, \nabla_{\mathcal{S}}\varphi)^{=}0$ Γ_N-ზე და $\varphi^+ = 0$ Γ_D-ზე. მაშინ $(\operatorname{div}_{\mathcal{S}} A\, \nabla_{\mathcal{S}} - \mathcal{H})\varphi = 0$, $\int_\Gamma \langle(\boldsymbol{\nu}_\Gamma, A\, \nabla_{\mathcal{S}}\varphi)^+, \varphi^+\rangle ds = 0$, და საბოლოოდ მიიღებთ

$$\boldsymbol{(}A\nabla_{\mathcal{S}}\varphi, \nabla_{\mathcal{S}}\varphi\boldsymbol{)}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{(}\operatorname{Re}\mathcal{H}\varphi, \varphi\boldsymbol{)}_{\mathcal{S}} = 0, \qquad \boldsymbol{(}\operatorname{Im}\mathcal{H}\varphi, \varphi\boldsymbol{)}_{\mathcal{S}} = 0. \qquad (2.33)$$

ახლა ვთქვათ $\operatorname{Re}\mathcal{H}(t) \geqslant 0$ ყველა $t \in \mathcal{S}$-სთვის და $\operatorname{mes}\operatorname{supp}\operatorname{Re}\mathcal{H} \neq 0$ ((i) შემთხვევა). მაშინ (2.33)-ის პირველი ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\boldsymbol{(}A\nabla_{\mathcal{S}}\varphi, \nabla_{\mathcal{S}}\varphi\boldsymbol{)}_{\mathcal{S}} = 0, \qquad \boldsymbol{(}\operatorname{Re}\mathcal{H}\varphi, \varphi\boldsymbol{)}_{\mathcal{S}} = 0.$$

პირველი ტოლობა $\boldsymbol{(}A\nabla_{\mathcal{S}}\varphi, \nabla_{\mathcal{S}}\varphi\boldsymbol{)}_{\mathcal{S}} = 0$ გვაძლევს, რომ $\varphi(t) = C = \mathrm{const}$ და თუ ჩავსვამთ მეორე ტოლობაში, მივიღებთ

$$0 = \boldsymbol{(}\operatorname{Re}\mathcal{H}\varphi, \varphi\boldsymbol{)}_{\mathcal{S}} = C\int_{\mathcal{S}} \mathcal{H}(t)d\sigma,$$

და დასკვნა $\varphi(t) = C = \mathrm{const} = 0$ არის მართებული.

თუ $M = \operatorname{Im}\mathcal{H}(t) = \mathrm{const} \neq 0$ ((ii) შემთხვევა), იგივე დასკვნა გამომდინარეობს მეორე ტოლობიდან (2.33)-ში:

$$0 = \boldsymbol{(}\operatorname{Im}\mathcal{H}\varphi, \varphi\boldsymbol{)}_{\mathcal{S}} = M\boldsymbol{(}\varphi, \varphi\boldsymbol{)}_{\mathcal{S}} = M\,\|\varphi\big|L_2(\mathcal{S})\|^2$$

და, კვლავ, $\varphi = 0$.

თუ $\operatorname{Re}\mathcal{H} = 0$, ან $\operatorname{Im}\mathcal{H}(t) \geqslant 0$ ყველა $t \in \mathcal{S}$-სთვის ან $\operatorname{Im}\mathcal{H}(t) \leqslant 0$ ყველა $t \in \mathcal{S}$-სთვის და $\operatorname{mes}\operatorname{supp}\operatorname{Im}\mathcal{H} \neq 0$ ((iii) შემთხვევა), (2.32) ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$(-(\operatorname{div}_{\mathcal{S}} A\nabla_{\mathcal{S}} - \mathcal{H})\varphi, \varphi)_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{(}A\nabla_{\mathcal{S}}\varphi, \nabla_{\mathcal{S}}\varphi\boldsymbol{)}_{\mathcal{S}} + i\boldsymbol{(}\operatorname{Im}\mathcal{H}\varphi, \varphi\boldsymbol{)}_{\mathcal{S}} = 0$$

და, მაშასადამე, თუ $(\operatorname{div}_{\mathcal{S}} A\nabla_{\mathcal{S}} - \mathcal{H})_{\mathcal{S}}\varphi = 0$ $\mathbb{W}^1_2(\mathcal{S})$-სთვის, მაშინ

$$\boldsymbol{(}A\nabla_{\mathcal{S}}\varphi, \nabla_{\mathcal{S}}\varphi\boldsymbol{)}_{\mathcal{S}} = 0, \qquad \boldsymbol{(}\operatorname{Im}\mathcal{H}\varphi, \varphi\boldsymbol{)}_{\mathcal{S}} = 0.$$

დასკვნა $\varphi = \mathrm{const} = 0$ გამომდინარეობს როგორც (i) შემთხვევაში.

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{div}_{\mathcal{S}} A \nabla_{\mathcal{S}} - \mathcal{H}I) = \{0\}$. ვინაიდან ოპერატორი თვითშეუღლებადია, იგივე სამართლიანია დუალური ოპერატორისთვის $\mathrm{Coker}\,(\mathrm{div}_{\mathcal{S}} A \nabla_{\mathcal{S}} - \mathcal{H}I) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{div}_{\mathcal{S}} A \nabla_{\mathcal{S}} - \mathcal{H}I) = \{0\}$ რომელიც, ყოველთვის $\mathrm{div}_{\mathcal{S}} A \nabla_{\mathcal{S}} - \mathcal{H}I \;:\; \mathbb{W}^1(\mathcal{S}) \to \mathbb{W}^{-1}(\mathcal{S})$ ოპერატორის ფრედჰოლმურობის თვისებასთან ერთად გვაძლევს ამ ოპერატორის შებრუნებადობას ((2.30)-ში ოპერატორის შებრუნებადობას $s = 0$ და $p = 2$-სთვის).

თუ $s \neq 0$ ან $p \neq 2$, ჩვენ გავაგრძელებთ შემდეგნაირად: კარგად ცნობილია (მაგ., იხ. დუდუჩავა, 1973, [29]), რომ თუ ოპერატორი ფრედჰოლმისაა ბანახის სივრცეთა (2.30) სკალაში ყველა $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$ პარამეტრისთვის და შებრუნებადია მხოლოდ პატამეტრების ერთი წყვილისთვის $(p, s) = (2, 0)$, მაშინ შებრუნებადია პარამეტრების $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$ ყველა მნიშვნელობისთვის.

იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ მეორე ნაწილი (იხ. დუდუჩავა, 2009, [**?**, **?**, ლემა 5.2] Du09 კერძო შემთხვევისთვის), შევნიშნოთ, რომ ოპერატორის $\mathrm{div}_{\mathcal{S}} A \nabla_{\mathcal{S}}$ განსაზღვრის არე არის $\mathbb{X}^{s+1}_{p,\#}(\mathcal{S})$.

იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ, რომ ოპერატორის $\mathrm{div}_{\mathcal{S}} A \nabla_{\mathcal{S}}$ ანასახი ემთხვევა $\mathbb{X}^{s-1}_{p,\#}(\mathcal{S})$ სივრცეს, ვთქვათ $\psi_0 \in \mathbb{X}^{s-1}_{p,\#}(\mathcal{S})$ არის ოპერატორის $\mathrm{Im}\,\mathrm{div}_{\mathcal{S}} A \nabla_{\mathcal{S}}$ ანასახის ორთოგონალური. მაშინ ტოლობა

$$0 = \big(\mathrm{div}_{\mathcal{S}} A \nabla_{\mathcal{S}} \varphi, \psi_0\big) = \big(\varphi, \mathrm{div}_{\mathcal{S}} A \nabla_{\mathcal{S}} \psi_0\big)$$

სრულდება ყველა $\varphi \in \mathbb{X}^{s+1}_p(\mathcal{S})$-სთვის. მაგრამ $\mathrm{div}_{\mathcal{S}} A \nabla_{\mathcal{S}} \psi_0 = 0$, რაც გულისხმობს, რომ $\psi_0 = \mathrm{const}$ და ამიტომ, მხოლოდ მუდმივი ფუნქციები არიან ოპერატორის $\mathrm{Im}\,\mathrm{div}_{\mathcal{S}} A \nabla_{\mathcal{S}}$ ანასახის ორთოგონალურები. ეს ამტკიცებს, რომ ანასახი $\mathrm{Im}\,\mathrm{div}_{\mathcal{S}} A \nabla_{\mathcal{S}} := \mathrm{div}_{\mathcal{S}} A \nabla_{\mathcal{S}}$ ემთხვევა სივრცეს $\mathbb{X}^{s-1}_{p,\#}(\mathcal{S})$.

შევნიშნოთ, რომ $-\mathrm{div}_{\mathcal{S}} A \nabla_{\mathcal{S}}$ ოპერატორი შემდეგი დასმით

$$-\mathrm{div}_{\mathcal{S}} A \nabla_{\mathcal{S}} \;:\; \mathbb{W}^1_{2,\#}(\mathcal{S}) \to \mathbb{W}^{-1}_{2,\#}(\mathcal{S}). \tag{2.34}$$

არის დადებითად განსაზღვრული (კოერციული). მართლაც, (1.16), (2.14) და (2.29)-ის თანახმად მივიღებთ

$$\big(-\mathrm{div}_{\mathcal{S}} A \nabla_{\mathcal{S}} \varphi, \varphi\big) = \big(A \nabla_{\mathcal{S}} \varphi, \nabla_{\mathcal{S}} \varphi\big) \geq C \|\nabla_{\mathcal{S}} \varphi \big| \mathbb{L}_2(\mathcal{S})\|^2 = C \|\varphi \big| \mathbb{W}^1_{2,\#}(\mathcal{S})\|^2 \tag{2.35}$$

$$\text{ყველა} \quad \varphi \in \mathbb{W}^1_{2,\#}(\mathcal{S}).$$

ამიტომ $\mathrm{div}_{\mathcal{S}} A \nabla_{\mathcal{S}}$-ს აქვს ტრივიალური ბირთვი $\mathrm{Ker}(\mathrm{div}_{\mathcal{S}} A \nabla_{\mathcal{S}}) = \{0\}$ $\mathbb{W}^1_{2,\#}(\mathcal{S})$-ში და არის ნორმალურად ამოხსნადი (აქვს ჩაკეტილი ანასახი). ვინაიდან $\mathrm{div}_{\mathcal{S}} A \nabla_{\mathcal{S}}$ არის თვითშეუღლებული და სივრცეები $\mathbb{W}^1_{2,\#}(\mathcal{S})$ და $\mathbb{W}^{-1}_{2,\#}(\mathcal{S})$ არიან შეუღლებულნი (იხ. (2.26)), (2.34)-ის შეუღლებული ოპერატორი არის ნორმალურად ამოხსნადი და აქვს ტრივიალური ბირთვი.

დამტკიცება სრულდება ისევე, როგორც თეორემის პირველ ნაწილში. □

შედეგი 2.11. *სივრცე $\mathbb{X}^s(\mathcal{C})$ დაყოფილია პირდაპირი ჯამის სახით:*

$$\mathbb{X}^s(\mathcal{C}) = \mathbb{X}^s_{\#}(\mathcal{C}) + \{\mathrm{const}\}, \tag{2.36}$$

სადაც $\mathbb{X}^s_{\#}(\mathcal{C})$ არის სივრცე კონსტანტების გარეშე და ოპერატორი $\Delta^2_{\mathcal{S}}$ შებრუნებადია ასეთ სივრცეებს შორის (იხ. (2.24))

$$\Delta^2_{\mathcal{S}} \ : \ \mathbb{X}^{s+2}_{\#}(\mathcal{S}) \to \mathbb{X}^{s-2}_{\#}(\mathcal{S}). \tag{2.37}$$

აქედან გამომდინარე, $\Delta^2_{\mathcal{S}}$-ს აქვს ფუნდამენტური ამონახსნი (2.37) დასმით.

დამტკიცება: ოპერატორის შემოსაზღვრულობა (2.37)-ში გამომდინარეობს შემდეგი ოპერატორის შემოსაზღვრულობიდან

$$\Delta_{\mathcal{S}} \ : \ \mathbb{X}^{s+1}_{\#}(\mathcal{S}) \to \mathbb{X}^{s-1}_{\#}(\mathcal{S}).$$

რომელიც დამტკიცებულია თეორემა (2.10)-ში.

ვინაიდან $\Delta^2_{\mathcal{S}}$-ს აქვს ტრივიალური ბირთვი (2.37)-დასმით და არის თვითშეუღლებული (იხ. ლემა 2.9), მას აქვს ტრივიალური კო-ბირთვი და არის შებრუნებადი ოპერატორი. □

შედეგი 2.12 (იხ. დუდუჩავა, 2009, [23]). $\mathrm{div}_{\mathcal{C}}(A\nabla_{\mathcal{C}})$ *ოპერატორისთვის ღია $\mathcal{C}$ ჰიპერზედაპირზე $\partial\mathcal{C} := \Gamma$ საზღვრით სამართლიანია შემდეგი გრინის ფორმულები*

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{div}_{\mathcal{S}}(A\nabla_{\mathcal{C}}\varphi), \psi)_{\mathcal{C}} = (\langle \boldsymbol{\nu}_\Gamma, (A\,\nabla_{\mathcal{C}}\varphi)^+\rangle, \psi^+)_\Gamma - (A\nabla_{\mathcal{C}}\varphi, \nabla_{\mathcal{C}}\psi)_{\mathcal{C}}\,,\\
&(\mathrm{div}_{\mathcal{S}}(A\nabla_{\mathcal{C}}\varphi), \psi)_{\mathcal{C}} - (\varphi, \mathrm{div}_{\mathcal{S}}(A\nabla_{\mathcal{C}}\psi))_{\mathcal{C}}\\
&\qquad = (\langle \boldsymbol{\nu}_\Gamma, (A\,\nabla_{\mathcal{C}}\varphi)^+\rangle, \psi^+)_\Gamma - (\varphi^+, \langle \boldsymbol{\nu}_\Gamma, (A\,\nabla_{\mathcal{C}}\psi)^+\rangle)_\Gamma,
\end{aligned} \tag{2.38}$$

სადაც $(\varphi, \psi)_{\mathcal{C}}$ აღნიშნავს ფუნქციების სკალარულ ნამრავლს $\varphi, \psi \in C^\infty(\mathcal{C})$, ხოლო ნორმალური $\langle \boldsymbol{\nu}_\Gamma, (A\,\nabla_{\mathcal{C}}\varphi)^+\rangle$ სასაზღვრო წარმოებული ჩვენ უკვე განვიხილეთ (1.15) *შერეულ სასაზღვრო ამოცანაში.*

შედეგი 2.13. *ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორისთვის $\Delta^2_{\mathcal{C}}$ ღია ჰიპერზედაპირზე $\mathcal{C}$ განიმარტება გრინის I და II ფორმულა:*

$$(\Delta^2_{\mathcal{C}}\varphi, \psi)_{\mathcal{C}} - (\Delta_{\mathcal{C}}\varphi, \Delta_{\mathcal{C}}\psi)_{\mathcal{C}} = -((\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\Delta_{\mathcal{C}}\varphi)^+, \psi^+)_\Gamma + ((\Delta_{\mathcal{C}}\varphi)^+, (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\psi)^+)_\Gamma\,, \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta^2_{\mathcal{C}}\varphi, \psi)_{\mathcal{C}} + ((\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\Delta_{\mathcal{C}}\varphi)^+, \psi^+)_\Gamma - ((\Delta_{\mathcal{C}}\varphi)^+, (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\psi)^+)_\Gamma = (\varphi, \Delta^2_{\mathcal{C}}\psi)_{\mathcal{C}}\\
+(\varphi^+, (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\Delta_{\mathcal{C}}\psi)^+)_\Gamma - ((\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\varphi)^+, (\Delta_{\mathcal{C}}\psi)^+)_\Gamma
\end{aligned} \tag{2.40}$$

$\varphi, \psi \in \mathbb{X}^2(\mathcal{C})$-სთვის (იხ. ჭკადუა, 2016, [15]).

ლემა 2.14 (იხ. ლიონსი & მაგენსი 1972; ლაქსი & მილგრამი, 1954, [54, 56])**. (ლაქს-მილგრამი)**. *ვთქვათ* $\mathfrak{B}$ *არის ბანახის სივრცე,* $A(\varphi, \psi)$ *არის უწყვეტი ბიწრფივი ფორმა*

$$A(\cdot, \cdot) \, : \, \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \to \mathbb{R} \tag{2.41}$$

და დადებითად განსაზღვრულია

$$A(\varphi, \varphi) \geq C \|\varphi\big|\mathfrak{B}\|^2 \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{B}, \quad C > 0. \tag{2.42}$$

ვთქვათ $L(\cdot) \, : \, \mathfrak{B} \to \mathbb{R}$ *არის უწყვეტი წრფივი ფუნქციონალი.*

წრფივ განტოლებას

$$A(\varphi, \psi) = L(\psi) \tag{2.43}$$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი $\varphi \in \mathfrak{B}$ *ნებისმიერი* $\psi \in \mathfrak{B}$*-თვის.*

2.2. შერეული სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობა ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის

ვთქვათ, კვლავ $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ არის ჩაკეტილი ჰიპერზედაპირის $\mathcal{S}$ გლუვი ქვეზედაპირი და $\Gamma = \partial\mathcal{C} \neq \emptyset$ არის მისი გლუვი საზღვარი $\partial\mathcal{C} = \Gamma$. ვთქვათ, $\operatorname{div}_{\mathcal{C}} A\,\nabla_{\mathcal{C}}$ არის შეზღუდული ოპერატორი $\mathcal{C}$ ჰიპერზედაპირზე. საზღვარი გაყოფილია ორ ნაწილად $\partial\mathcal{C} = \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ და მიმდინარე თავში განვიხილავთ სასაზღვრო ამოცანას (1.15) განტოლებისათვის შერეული სასაზღვრო პირობებით კლასიკური ფორმულირებით (1.11).

შევნიშნოთ, რომ $\varphi \in \mathbb{W}^s_p(\mathcal{C})$ (and $\varphi \in \mathbb{H}^s_p(\mathcal{C})$) ფუნქციას გააჩნია კვალი $\varphi^+ \in \mathbb{W}_p^{s-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ საზღვარზე, $1 < p < \infty$ და $s > \dfrac{1}{p}$ პარამეტრებისთვის (იხ. ტრიბელი, 1995, [70]). შესაბამისად, თუ ჩვენ ვეძებთ (1.15) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნს $\mathbb{W}^1(\mathcal{C})$ სივრცეში, მაშინ u^+ კვალი Γ_D-ზე არსებობს და ეკუთვნის $\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_D)$ სივრცეს.

ნეიმანის კვალის $\langle \boldsymbol{\nu}_\Gamma, A\,\nabla_{\mathcal{C}}\rangle^+$ არსებობა $u \in \mathbb{W}^1(\mathcal{C})$ ამონახსნისთვის (1.15) ამოცანაში არ არის გარანტირებული კვალების ძირითადი თეორემის საშუალებით. მაგრამ ამ შემთხვევაში გრინის პირველი ფორმულა (2.38) უზრუნველყოფს ნეიმანის კვალის არსებობას. მართლაც, თუ განვიხილავთ $\varphi = u$ და სასაზღვრო პირობას $(\operatorname{div}_{\mathcal{C}} A \nabla_{\mathcal{C}})u(t) = f(t)$ (1.15) ამოცანიდან ჩავსვამთ გრინის პირველ ფორმულაში (2.38), მივიღებთ შემდეგს

$$(\langle \boldsymbol{\nu}_\Gamma, (A\,\nabla_{\mathcal{C}} u)^+\rangle, \psi^+)_\Gamma - (A\,\nabla_{\mathcal{C}} u, \nabla_{\mathcal{C}}\psi)_{\mathcal{C}} = (\operatorname{div}_{\mathcal{C}}(A\,\nabla_{\mathcal{C}} u), \psi)_{\mathcal{C}} = (f, \psi)_{\mathcal{C}}$$

და საბოლოოდ მივიღებთ

$$(\langle \boldsymbol{\nu}_\Gamma, (A\,\nabla_{\mathcal{C}} u)^+\rangle, \psi^+)_\Gamma = (f, \psi)_{\mathcal{C}} + (A\,\nabla_{\mathcal{C}} u, \nabla_{\mathcal{C}}\psi)_{\mathcal{C}} \tag{2.44}$$

ნებისმიერი $\psi \in \mathbb{W}^1(\mathcal{C})$-სთვის. ვინაიდან $\psi^+ \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma)$, (2.44) განტოლების მარჯვენა მხარეში $(A\nabla_{\mathcal{C}} u, \nabla_{\mathcal{C}}\psi)_{\mathcal{C}}$ სკალარული ნამრავლი კორექტულადაა განსაზღვრული და უზრუნველყოფს კორექტულ დუალობას ტოლობის მარცხენა მხარეში. ვინაიდან $\psi^+ \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma)$ ნებისმიერია, დუალობის არგუმენტის თანახმად დავასკვნით, რომ $\langle \boldsymbol{\nu}_\Gamma, (A\,\nabla_{\mathcal{C}} u)^+\rangle$ კვალი ეკუთვნის დუალურ სივრცეს, ე.ი. $\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma)$-ს.

იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ თეორემა (2.44) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის შესახებ, დაგვჭირდება მეტი თვისება კვალების ოპერატორზე (რომელსაც ეძახიან რეტრაქციას) და მათი შებრუნებულები (რომელსაც ეწოდება კო-რეტრაქცია) (იხ. ტრიბელი, 1995, [70, § 2.7]).

მასალის გადმოცემის გასამარტივებლად განვიხილოთ ლემის 4.8 კერძო შემთხვევა სტატიიდან [22], რომელსაც გამოვიყენებთ ამ გამოკვლევაში.

ლემა 2.15 (იხ. ლემა 4.8 სტატიაში: დუდუჩავა, 2001, [22])**.** *ვთქვათ $s > 0$, $s \notin \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $\boldsymbol{B}(D)$ არის პირველი რიგის ნორმალური დიფერენციალური ოპერატორი, განმარტებული სა-*

ზღვრის $\Gamma = \partial\mathcal{C}$ *მახლობლობაში და* $\boldsymbol{A}(D)$ *არის მეორე რიგის ნორმალური დიფერენციალური ოპერატორი, განმარტებული* $\mathcal{C}$ *ზედაპირზე. მაშინ არსებობს უწყვეტი წრფივი ოპერატორი*

$$\mathcal{B} \quad : \quad \mathbb{W}^s_p(\Gamma) \otimes \mathbb{W}^{s-1}_p(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{H}^{s+\frac{1}{p}}_p(\mathcal{C}) \tag{2.45}$$

ისეთი, რომ

$$(\mathcal{B}\Phi)^+ = \varphi_0, \qquad (\boldsymbol{B}(D)\mathcal{B}\Phi)^+ = \varphi_1, \qquad \boldsymbol{A}(D)\mathcal{B}\Phi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{s-2+\frac{1}{p}}_p(\mathcal{C}) \tag{2.46}$$

ფუნქციების ნებისმიერი წყვილისთვის $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1)^\top$*, სადაც* $\varphi_0 \in \mathbb{W}^s_p(\Gamma)$ *და* $\varphi_1 \in \mathbb{W}^{s-1}_p(\Gamma)$.

თეორემის 1.2 დამტკიცება: დავიწყოთ სასაზღვრო ამოცანის (1.15) დაყვანით ექვივალენტურ სასაზღვრო ამოცანაზე ერთგვაროვანი დირიხლეს პირობით. ამისათვის სასაზღვრო პირობა $g \in \mathbb{W}^{1/2}(\Gamma_D)$ გავაგრძელოთ რაიმე $\widetilde{g} \in \mathbb{W}^{1/2}(\Gamma)$ ფუნქციამდე მთელ საზღვარზე Γ და გამოვიყენოთ ლემა 2.15: არსებობს ფუნქცია $G \in \mathbb{W}^1(\mathcal{C})$ ისეთი, რომ $G^+(t) = g(t)$ $t \in \Gamma_D$-სთვის ($G^+ = \widetilde{g}$ თითქმის ყველგან საზღვარზე) და $\operatorname{div}_{\mathcal{C}}(A\,\nabla_{\mathcal{C}}G) \in \widetilde{\mathbb{W}}^{-1}(\overline{\mathcal{C}})$.

ახალი უცნობი ფუნქციისთვის $v := u - G$ გვაქვს (1.15) სასაზღვრო ამოცანის შემდეგი ექვივალენტური ფორმულირება:

$$\begin{cases} \operatorname{div}_{\mathcal{C}}(A\nabla_{\mathcal{C}}v)(t) = f_0(t), & t \in \mathcal{C}, \\ v^+(s) = 0, & \text{on} \quad \Gamma_D, \\ \langle \boldsymbol{\nu}_\Gamma(s), (A\,\nabla_{\mathcal{C}}v)^+(s)\rangle = h_0(s), & \text{on} \quad \Gamma_N, \end{cases} \tag{2.47}$$

სადაც

$$\begin{aligned} &f_0 := f + \operatorname{div}_{\mathcal{C}}(A\nabla_{\mathcal{C}}G) \in \widetilde{\mathbb{W}}^{-1}(\mathcal{C}), \quad h_0 := h + \langle \boldsymbol{\nu}_\Gamma, (A\,\nabla_{\mathcal{C}}G)^+\rangle \in \mathbb{W}^{-1/2}(\Gamma_N), \\ &v^+ \in \widetilde{\mathbb{W}}^{1/2}(\Gamma_N). \end{aligned} \tag{2.48}$$

რომ დავამტკიცოთ ჩართვა $v^+ \in \widetilde{\mathbb{W}}^{1/2}(\Gamma_N)$ შევნიშნოთ, რომ ჩვენი აგების თანახმად, ამონახსნის კვალი Γ_D-ზე ქრება $v^+|_{\Gamma_D} = 0$.

ვთქვათ$\Gamma_0 \subset \Gamma$ არის საზღვრის ნაწილი და $\mathbb{W}^s(\Gamma_0, \mathcal{C})$-თი, $s > 1/2$, აღვნიშნოთ $\varphi \in \mathbb{W}^s(\Gamma_0, \mathcal{C})$ ფუნქციების სივრცე, რომელთაც კვალი საზღვარზე შეყურსულია Γ_0=ზე, ე.ი. $\varphi^+ \in \widetilde{\mathbb{W}}^{s-1/2}(\Gamma_0)$.

თუ (2.47) ამოცანის სასაზღვრო პირობებს ჩავსვამთ გრინის პირველ (2.38) ფორმულაში, სადაც $\varphi = \psi = v$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{(}A\,\nabla_{\mathcal{C}}v, \nabla_{\mathcal{C}}v\boldsymbol{)}_{\mathcal{C}} &= \boldsymbol{(}\langle\boldsymbol{\nu}_\Gamma, (A\,\nabla_{\mathcal{C}}v)^+\rangle, v^+\boldsymbol{)}_{\Gamma_D} + \boldsymbol{(}\langle\boldsymbol{\nu}_\Gamma, (A\,\nabla_{\mathcal{C}}v)^+\rangle, v^+\boldsymbol{)}_{\Gamma_N} \\ &-\boldsymbol{(}\operatorname{div}_{\mathcal{C}}(A\,\nabla_{\mathcal{C}}v), v\boldsymbol{)}_{\mathcal{C}} = \boldsymbol{(}h_0, v^+\boldsymbol{)}_{\Gamma_N} - \boldsymbol{(}f_0, v\boldsymbol{)}_{\mathcal{C}}, \quad v \in \widetilde{\mathbb{W}}^1(\Gamma_N, \mathcal{C}). \end{aligned} \tag{2.49}$$

(2.49) ტოლობის მარცხენა მხარეში გვაქვს სიმეტრიული ბიწრფივი ფორმა, რომელიც დადებითად არის განსაზღვრული

$$\boldsymbol{(}A\nabla_{\mathcal{C}}v, \nabla_{\mathcal{C}}v\boldsymbol{)}_{\mathcal{C}} \geqslant C\|\nabla_{\mathcal{C}}v\|^2 \qquad \forall\, v \in \widetilde{\mathbb{W}}^1(\Gamma_N, \mathcal{C}), \tag{2.50}$$

რადგან $A = [a_{jk}]_{n\times n}$ არის მკაცრად დადებითად განსახღვრული მატრიცი. მეორეს მხრივ, $\widetilde{\mathbb{W}}^1(\Gamma_N, \mathcal{C})$ სივრცეში მოცემული ფუნქციები ქრება საზღვრის Γ_D ნაწილზე, $\nabla_{\mathcal{C}}v$ განსაზღვრავს ექვივალენტურ ნორმას

$$\|\nabla_{\mathcal{C}}v\| \leqslant \|v|\mathbb{W}^1(\Gamma_N)\| \leqslant C_1\|\nabla_{\mathcal{C}}v\| \qquad \forall\, v \in \widetilde{\mathbb{W}}^1(\Gamma_N, \mathcal{C}). \tag{2.51}$$

(2.50) და (2.51) ტოლობებიდან გამომდინარეობს დადებითად განსაზღვრულობა:

$$(A\nabla_{\mathcal{C}}v, \nabla_{\mathcal{C}}v)_{\mathcal{C}} \geqslant C_2\|v|\mathbb{W}^1(\Gamma_N)\|^2 \qquad \forall\, v \in \widetilde{\mathbb{W}}^1(\Gamma_N, \mathcal{C}).$$

(2.49) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $(h_0, v^+)_{\Gamma_N}$ და $(f_0, v)_{\mathcal{C}}$ არიან კორექტულად განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციონალები, ვინაიდან $h_0 \in \mathbb{W}^{-1/2}(\Gamma_N)$, $f_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}^{-1}(\mathcal{C})$, მაშინ მათი მეწყვილე ფუნქციონალში ეკუთვნის დუალურ სივრცეებს $v^+ \in \widetilde{\mathbb{W}}^{1/2}(\Gamma_N)$ და $v \in \widetilde{\mathbb{W}}^1(\Gamma_N, \mathcal{C}) \subset \mathbb{W}^1(\mathcal{C})$.

2.14 ლაქს-მილგრამის ლემა ასრულებს დამტკიცებას. □

შენიშვნა 2.16. *2.14 ლაქს-მილგრამის ლემა შეგვიძლია გამოვიყენოთ დირიხლეს* (1.8), (1.11) *სასაზღვრო ამოცანისთვის, მაგრამ მხოლოდ ექვივალენტური დასმის შემდეგ: 2.15 ლემის თანახმად ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ $G \in \mathbb{W}^1(\mathcal{C})$ ფუნქცია ისეთი, რომ $G^+ = g$ და $\operatorname{div}_{\mathcal{C}}(A\,\nabla_{\mathcal{C}}G) \in \widetilde{\mathbb{W}}^{-1}(\mathcal{C})$.*

ახალი უცნობი $v := u - G$ ფუნქციისთვის ჩვენ გვაქვს (1.12) *სასაზღვრო ამოცანის შემდეგი ექვივალენტური დასმა:*

$$\begin{cases} \operatorname{div}_{\mathcal{C}}(A\,\nabla_{\mathcal{C}}v)(t) = f_0(t), & t \in \mathcal{C}, \\[2ex] v^+(s) = 0, & \text{on} \quad \Gamma, \end{cases} \tag{2.52}$$

სადაც

$$f_0 := f + \operatorname{div}_{\mathcal{C}}(A\,\nabla_{\mathcal{C}}G) \in \widetilde{\mathbb{W}}^{-1}(\mathcal{C}), \quad v \in \widetilde{\mathbb{W}}^1(\mathcal{C}). \tag{2.53}$$

სასაზღვრო (2.52) *ამოცანის სასაზღვრო პირობების ჩასმით გრინის პირველ* (2.38) *ტოლობაში, სადაც $\varphi = \psi = v$, მივიღებთ*

$$\begin{aligned}(A\nabla_{\mathcal{C}}v, \nabla_{\mathcal{C}}v)_{\mathcal{C}} &= (\langle \boldsymbol{\nu}_\Gamma, (A\,\nabla_{\mathcal{C}}v)^+\rangle, v^+)_\Gamma - (\operatorname{div}_{\mathcal{C}}(A\,\nabla_{\mathcal{C}}v), v)_{\mathcal{C}} \\ &= -(f_0, v)_{\mathcal{C}}, \qquad v \in \widetilde{\mathbb{W}}^1(\mathcal{C}).\end{aligned}$$

ლაქს-მილგრამის ლემა კი ამტკიცებს დირიხლეს (1.8), (1.11) *სასაზღვრო ამოცანის ერთადერთ ამოხსნადობას.*

შენიშვნა 2.17. *ლაქს-მილგრამის ლემა 2.14 გამოიყენება ნეიმანის სასაზღვრო ამოცანაში* (1.9), (1.11)

$$\begin{cases} \operatorname{div}_{\mathcal{C}}(A\,\nabla_{\mathcal{C}}v)(t) = f_0(t), & t \in \mathcal{C}, \\[2ex] \langle \boldsymbol{\nu}_\Gamma, (A\,\nabla_{\mathcal{C}}v)^+\rangle(s) = 0, & \text{on} \quad \Gamma, \end{cases} \tag{2.54}$$

თუ ჩავსვამთ სასაზღვრო ამოცანიდან (1.9) *სასაზღვრო პირობას გრინის პირველ ტოლობაში* (2.38), *სადაც* $\varphi = \psi = u$, *მივიღებთ*

$$
\begin{aligned}
A\nabla_{\mathcal{C}}u, \nabla_{\mathcal{C}}u)_{\mathcal{C}} &= (\langle \boldsymbol{\nu}_\Gamma, A\,\nabla_{\mathcal{C}}v\rangle^+, v^+)_\Gamma - ((\mathrm{div}_{\mathcal{C}} A\,\nabla_{\mathcal{C}})v, v)_{\mathcal{C}} \\
&= (h, u)_\Gamma - (f, u)_{\mathcal{C}}, \qquad u \in \mathbb{W}^1_{2,\#}(\mathcal{C}).
\end{aligned}
\tag{2.55}
$$

ჩვენ გვჭირდება თავსებადობის პირობა (1.13), *რადგან* (2.55) *ტოლობა სამართლიანი იყოს* $\mathbb{W}^1_{2,\#}(\mathcal{C})$ *სივრცეში: თუ* $v = \mathrm{const}$, *მარცხენა ნაწილი ქრება მაშინ, როცა მარჯვენა ნაწილი ქრება* $(h, \mathrm{const})_\Gamma - (f, \mathrm{const})_{\mathcal{C}} = 0$ *მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ სრულდება თავსებადობის პირობა* (1.13)

$$
(h, 1)_\Gamma - (f, 1)_{\mathcal{C}} = \oint_\Gamma h(s)ds - \int_{\mathcal{C}} f(y)d\sigma = 0,
$$

და უკანასკნელი წარმოდგენა ტოლობაში შესაძლებელია, თუ h *და* f *არიან რეგულარული ინტეგრებადი ფუნქციები.*

(2.35)-*ის თანახმად ბიწრფივი ფორმა* $(A\nabla_{\mathcal{C}}v, \nabla_{\mathcal{C}}v)_{\mathcal{C}}$ *დადებითად განსაზღვრულია და* (2.55) *ტოლობის მარჯვენა მხარეში ორივე ფუნციონალი შემოსაზღვრულია* $\mathbb{W}^1_{2,\#}(\mathcal{C})$ *ქვესივრცეზე. ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ლაქს-მილგრამის ლემა და დავამტკიცოთ ერთადერთი ამონახსნის არსებობა* $v \in \mathbb{W}^1_{2,\#}(\mathcal{C})$ *ნეიმანის სასაზღვრო ამოცანისათვის* (1.9), (1.11), *თავსებადობის პირობის* (1.13) *გათვალისწინებით.*

2.3. სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობა ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის

ვთქვათ, კვლავ $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ არის ჩაკეტილი ჰიპერზედაპირის $\mathcal{S}$ გლუვი ქვეზედაპირი და $\Gamma = \partial\mathcal{C} \neq \emptyset$ არის მისი გლუვი საზღვარი.

იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ ამონახსნის ერთადერთობის შესახებ თეორემა, დაგვჭირდება მეტი თვისება კვალების ოპერატორზე (რომელსაც ეძახიან რეტრაქციას) და მათ შებრუნებულებზე (რომელსაც ეწოდება კო-რეტრაქცია, იხ. ტრიბელი, 1995, [70, § 2.7]).

მასალის გადმოცემის გასამარტივებლად განვიხილოთ ლემის 4.8 კერძო შემთხვევა რ. დუდუჩავას სტატიიდან [22], რომელსაც გამოვიყენებთ ამ გამოკვლევაში.

ლემა 2.18. *ვთქვათ, $s > 0$, $s \notin \mathbb{N}$, $p = 2$, $\boldsymbol{B}(D)$ არის მესამე რიგის ნორმალური დიფერენციალური ოპერატორი, განმარტებული საზღვრის $\Gamma = \partial\mathcal{C}$ მახლობლობაში და $\boldsymbol{A}(D)$ არის მეოთხე რიგის ნორმალური დიფერენციალური ოპერატორი, განმარტებული $\mathcal{C}$ ზედაპირზე. მაშინ არსებობს უწყვეტი წრფივი ოპერატორი*

$$\mathcal{B} \ : \ \mathbb{H}^s(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{s-1}(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{s-2}(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{s-3}(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{H}^{s+\frac{1}{2}}(\mathcal{C}) \tag{2.56}$$

ისეთი, რომ

$$(\mathcal{B}\Phi)^+ = \varphi_0, \qquad (\boldsymbol{B}_1(D)\mathcal{B}\Phi)^+ = \varphi_1, \qquad (\boldsymbol{B}_2(D)\mathcal{B}\Phi)^+ = \varphi_2,$$
$$(\boldsymbol{B}_3(D)\mathcal{B}\Phi)^+ = \varphi_3, \qquad \boldsymbol{A}(D)\mathcal{B}\Phi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{s-4+\frac{1}{2}}(\mathcal{C}) \tag{2.57}$$

ფუნქციების ნებისმიერი ოთხეულისთვის $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^\top$, სადაც $\varphi_0 \in \mathbb{H}^s(\Gamma)$, $\varphi_1 \in \mathbb{H}^{s-1}(\Gamma)$,$\varphi_2 \in \mathbb{H}^{s-2}(\Gamma)$ და $\varphi_3 \in \mathbb{H}^{s-3}(\Gamma)$.

შედეგი 2.19. *ვთქვათ, u არის $\Delta_{\mathcal{C}}^2 u = f$ განტოლების ამონახსნი. მაშინ მას გააჩნია შემდეგი კვალები $u^+ \in \mathbb{H}^{\frac{3}{2}}$, $\quad(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} u)^+ \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}$, $\quad(\Delta_{\mathcal{C}} u)^+ \in \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}$, $\quad(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\Delta_{\mathcal{C}} u)^+ \in \mathbb{H}^{-\frac{3}{2}}$.*

დამტკიცება: კვალების $u^+ \in \mathbb{H}^{\frac{3}{2}}$, $\quad(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} u)^+ \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}$ არსებობა წარმოადგენს კვალების შესახებ ძირითადი თეორემის პირდაპირ შედეგს (დეტალებისთვის იხ. ტრიბელი, 1995, [70]). დავამტკიცოთ დარჩენილი კვალების არსებობა. კვალის $(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\Delta_{\mathcal{C}}\varphi)^+$ არსებობა (1.19) ამოცანაში $u \in \mathbb{H}^2(\mathcal{C})$ ამონახსნისთვის არ არის გარანტირებული კვალების ძირითადი თეორემის თანახმად, მაგრამ ლემა 2.18-ის თანახმად, არსებობს ფუნქცია $\psi \in \mathbb{H}^2(\mathcal{C})$ ისეთი, რომ $\psi^+ \in \mathbb{H}^{3/2}(\Gamma)$ ნებისმიერია და $(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\psi)^+ = 0$, მაშინ გრინის პირველი ფორმულა (2.39) უზრუნველყოფს კვალის არსებობას. მართლაც, $\varphi = u$ დაშვებით და $\Delta_{\mathcal{C}}^2\varphi = f(t)$-ის გათვალისწინებით გრინის პირველ ფორმულაში (2.39) მივიღებთ შემდეგს

$$-((\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\Delta_{\mathcal{C}} u)^+, \psi^+)_\Gamma = (f, \psi)_{\mathcal{C}} - (\Delta_{\mathcal{C}} u, \Delta_{\mathcal{C}}\psi)_{\mathcal{C}}. \tag{2.58}$$

ტოლობის (2.58) მარჯვენა მხარეში სკალარული ნამრავლი $(\Delta_{\mathcal{C}} u, \Delta_{\mathcal{C}} \psi)$ განმარტებულია კორექტულად და უზრუნველყოფს კორექტულ დუალობას ტოლობის მარცხენა მხარეში. ვინაიდან $\psi^+ \in \mathbb{H}^{3/2}(\Gamma)$ ნებისმიერია დუალობის არგუმენტის თანახმად დავასკვნით, რომ $(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \Delta_{\mathcal{C}} u)^+$ კვალი არსებობს და ეკუთვნის დუალურ სივრცეს, ე.ი. $\mathbb{H}^{-3/2}(\Gamma)$-ს.

ახლა ვაჩვენოთ $(\Delta_{\mathcal{C}} \varphi)^+$ კვალის არსებობა: თუ ავიღებთ ნებისმიერ $\psi \in \mathbb{H}^2(\mathcal{C})$ ფუნქციას და გრინის პირველ ფორმულას (2.39) გადავწერთ შემდეგი ფორმით

$$((\Delta_{\mathcal{C}} u)^+, (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \psi)^+)_\Gamma = (f, \psi)_{\mathcal{C}} - (\Delta_{\mathcal{C}} u, \Delta_{\mathcal{C}} \psi)_{\mathcal{C}} + ((\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \Delta_{\mathcal{C}} u)^+, \psi^+)_\Gamma, \tag{2.59}$$

შევამჩნევთ, რომ ტოლობის (2.59) მარჯვენა მხარე კორექტულადაა განსაზღვრული და უზრუნველყოფს კორექტულ დუალობას ტოლობის მარცხენა მხარეში. ვინაიდან $(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \psi)^+ \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma)$ ნებისმიერია, დუალობის არგუმენტის თანახმად დავასკვნით, რომ $(\Delta_{\mathcal{C}} u)^+$ კვალი არსებობს და ეკუთვნის დუალურ სივრცეს, ე.ი. $\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma)$-ს. □

თეორემა 1.4-ის დამტკიცება: დავიწყოთ სასაზღვრო ამოცანის (1.19) დაყვანით ექვივალენტურ სასაზღვრო ამოცანაზე ერთგვაროვანი პირობებით და გამოვიყენოთ ლემა 2.18: მაშინ არსებობს ფუნქცია $\Phi \in \mathbb{H}^2(\mathcal{C})$ ისეთი, რომ $(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \Phi)^+(t) = g(t)$ $t \in \Gamma$-სთვის და $\Delta^2_{\mathcal{C}} \Phi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-2}_0(\overline{\mathcal{C}})$.

ახალი უცნობი ფუნქციისთვის $v := u - \Phi$ გვაქვს სასაზღვრო ამოცანის (1.19) შემდეგი ექვივალენტური დასმა:

$$\begin{cases} \Delta^2_{\mathcal{C}} v(t) = f_0(t), & t \in \mathcal{C}, \\ (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} v)^+(s) = 0, & \Gamma - \text{ზე}, \\ (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \Delta_{\mathcal{C}} v)^+(s)\rangle = h_0(s), & \Gamma - \text{ზე}, \end{cases} \tag{2.60}$$

სადაც

$$\begin{aligned} & f_0 := f + \Delta^2_{\mathcal{C}} \Phi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-2}_0(\mathcal{C}), \quad h_0 := h + (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \Delta_{\mathcal{C}} \Phi)^+ \in \mathbb{H}^{-3/2}(\Gamma), \\ & v^+ \in \widetilde{\mathbb{H}}^{3/2}(\Gamma). \end{aligned} \tag{2.61}$$

სასაზღვრო ამოცანის (2.60) პირობების ჩასმით გრინის პირველ ტოლობაში (2.39), სადაც $\varphi = \psi = v$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} (\Delta_{\mathcal{C}} v, \Delta_{\mathcal{C}} v)_{\mathcal{C}} &= (\Delta^2_{\mathcal{C}} v, v)_{\mathcal{C}} + ((\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \Delta_{\mathcal{C}} v)^+, v^+)_\Gamma - ((\Delta_{\mathcal{C}} v)^+, (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} v)^+)_\Gamma \\ &= (f_0, v)_{\mathcal{C}} + (h_0, v^+)_\Gamma \end{aligned} \tag{2.62}$$

ტოლობის (2.62) მარცხენა მხარეში გვაქვს სიმეტრიული ბიწრფივი ფორმა, რომელიც დადებითად განსაზღვრულია

$$(\Delta_{\mathcal{S}} \varphi, \Delta_{\mathcal{S}} \varphi) = \|\Delta_{\mathcal{S}} \varphi \big| \mathbb{L}_2(\mathcal{S})\|^2 \geq 0, \qquad \varphi \in \mathbb{H}^2_\#(\mathcal{S})$$

(2.62) ტოლობაში $(h_0, v^+)_\Gamma$ და $(f_0, v)_{\mathcal{C}}$ არიან კორექტულად განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციონალები, რადგან $h_0 \in \mathbb{H}^{-3/2}(\Gamma)$, $f_0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-2}(\mathcal{C})$, მაშინ, როცა მათი მეწყვილე ფუნქციონალში ეკუთვნის დუალურ სივრცეს $v^+ \in \widetilde{\mathbb{H}}^{3/2}(\Gamma)$ და $v \in \widetilde{\mathbb{H}}^2(\Gamma, \mathcal{C}) \subset \mathbb{H}^2(\mathcal{C})$.

ლაქს-მილგრამის ლემა 2.14 ასრულებს დამტკიცებას. $\square$

2.4. შერეული სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობა ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის

თეორემა 1.5-ის დამტკიცება: დავიწყოთ სასაზღვრო ამოცანის (1.22) დაყვანით ექვივალენტურ სასაზღვრო ამოცანაზე ერთგვაროვანი პირობებით. ამისათვის სასაზღვრო პირობები $g_1 \in \mathbb{H}^{3/2}(\Gamma_1)$, $g_2 \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_2)$ და $h_1 \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$ გავაგრძელოთ $\widetilde{g_1} \in \mathbb{H}^{3/2}(\Gamma)$, $\widetilde{g_2} \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma)$ და $\widetilde{h_1} \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma)$ ფუნქციებამდე მთელ საზღვარზე Γ და გამოვიყენოთ ლემა 2.18, მაშინ არსებობს ფუნქციები $\Phi \in \mathbb{H}^2(\mathcal{C})$ ისეთი, რომ

$$\Phi^+ = \widetilde{g_1}, \qquad (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\Phi)^+ = \widetilde{g_2}, \qquad (\Delta_{\mathcal{C}}\Phi)^+ = h_1, \qquad \Delta^2_{\mathcal{C}}\Phi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-2}_0(\overline{\mathcal{C}}).$$

ახალი უცნობი ფუნქციისთვის $v := u - \Phi$ გვაქვს სასაზღვრო ამოცანის (1.22) შემდეგი ექვივალენტური დასმა:

$$\begin{cases} \Delta^2 v(t) = f_0(t), & t \in \mathcal{C}, \\ (v)^+(s) = 0, & \Gamma_1 - \text{ზე}, \\ (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} v)^+(s) = 0, & \Gamma_2 - \text{ზე}, \\ (\Delta_{\mathcal{C}} v)^+(s) = 0, & n \quad \Gamma_1 - \text{ზე}, \\ (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\Delta_{\mathcal{C}} v)^+(s) = h_0(s), & \Gamma_2 - \text{ზე}, \end{cases} \tag{2.63}$$

სადაც

$$\begin{aligned} &f_0 := f + \Delta^2_{\mathcal{C}}\Phi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-2}_0(\mathcal{C}), \quad h_0 := h_2 + (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\Delta_{\mathcal{C}}\Phi)^+ \in \mathbb{H}^{-3/2}(\Gamma_2), \\ &v^+ \in \widetilde{\mathbb{H}}^{3/2}(\Gamma_2), \quad (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} v)^+ \in \widetilde{\mathbb{H}}^{1/2}(\Gamma_1) \quad (\Delta_{\mathcal{C}} v)^+ \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1/2}(\Gamma_2) \end{aligned} \tag{2.64}$$

რომ დავამტკიცოთ ჩართვა $v^+ \in \widetilde{\mathbb{H}}^{3/2}(\Gamma_2)$, $(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} v)^+ \in \widetilde{\mathbb{H}}^{1/2}(\Gamma_1)$ და $(\Delta_{\mathcal{C}} v)^+ \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1/2}(\Gamma_2)$, შევნიშნოთ, რომ ჩვენი აგების თანახმად, ამონახსნის კვალები $v^+\,|_{\Gamma_1} = 0$, $(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} v)^+\,|_{\Gamma_2} = 0$ და $(\Delta_{\mathcal{C}} v)^+\,|_{\Gamma_1} = 0$ ქრებიან.

სასაზღვრო ამოცანი (2.63) პირობების ჩასმით გრინის პირველ ტოლობაში (2.39), სადაც $\varphi = \psi = v$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} &(\Delta_{\mathcal{C}} v, \Delta_{\mathcal{C}} v)_{\mathcal{C}} = (\Delta^2_{\mathcal{C}} v, v)_{\mathcal{C}} + ((\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\Delta_{\mathcal{C}} v)^+, v^+)_{\Gamma_1} + ((\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\Delta_{\mathcal{C}} v)^+, v^+)_{\Gamma_2} \\ &-((\Delta_{\mathcal{C}} v)^+, (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} v)^+)_{\Gamma_1} - ((\Delta_{\mathcal{C}} v)^+, (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} v)^+)_{\Gamma_2} = (f_0, v)_{\mathcal{C}} + (h_0, v^+)_{\Gamma_2} \end{aligned} \tag{2.65}$$

ტოლობის (2.65) მარცხენა მხარეში გვაქვს სიმეტრიული ბიწრფივი ფორმა, რომელიც დადებითად განსაზღვრულია

$$(\Delta_{\mathcal{S}}\varphi, \Delta_{\mathcal{S}}\varphi) = \|\Delta_{\mathcal{S}}\varphi\big|\mathbb{L}_2(\mathcal{S})\|^2 \geq 0, \qquad \varphi \in \mathbb{H}^2_{\#}(\mathcal{S})$$

$(h_0, v^+)_{\Gamma_2}$ და $(f_0, v)_{\mathcal{C}}$ (2.65) ტოლობიდან არიან კორექტულად განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციონალები, რადგან $h_0 \in \mathbb{H}^{-3/2}(\Gamma_2)$, $f_0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-2}(\mathcal{C})$ მაშინ, როცა მათი მეწყვილე ფუნქციონალში ეკუთვნის დუალურ სივრცეს $v^+ \in \widetilde{\mathbb{H}}^{3/2}(\Gamma_2)$ და $v \in \widetilde{\mathbb{H}}^2(\Gamma, \mathcal{C}) \subset \mathbb{H}^2(\mathcal{C})$.

ლაქს-მილგრამის ლემა 2.14 ასრულებს დამტკიცებას. □

3 ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის არაკლასიკური დასმით

3.1. განმარტებები და დამხმარე დებულებები

მოვიყვანოთ ძირითადი განმარტებები:

კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლება (კწდგ) წარმოადგენს განტოლებას ორი ან მეტი ცვლადის უცნობი ფუნქციისთვის და ამ ფუნქციის წარმოებულებისათვის. **განტოლების ამონახსნი** არის ფუნქცია, რომლის ჩასმითაც განტოლებაში მოცემული განტოლება გადაიქცევა ჭეშმარიტ ტოლობად. კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლების **რიგი** განისაზღვრება ამ განტოლებაში მონაწილე უდიდესი წარმოებულის რიგით. კწდგ არის **წრფივი**, თუ ის არის წრფივი უცნობი ფუნქციის და მისი ყველა წარმოებულის მიმართ, ხოლო განტოლების კოეფიციენტები არ არიან დამოკიდებულნი უცნობზე და დამოკიდებულნი არიან მხოლოდ დამოუკიდებელ ცვლადებზე.

განსაზღვრება 3.1. *წრფივ კწდგ-ს ეწოდება* **ერთგვაროვანი***, თუ განტოლება არ შეიცავს შესაკრებს, რომელიც დამოუკიდებელია უცნობ ფუნქციაზე და მის წარმოებულებზე. სხვა შემთხვევაში განტოლებას ეწოდება* **არაერთგვაროვანი**.

ჩვენ $\mathbb{H}^s_p(\mathcal{S})$, $\mathbb{H}^s_p(\mathcal{C})$, $\mathbb{W}^s_p(\mathcal{S})$, $\mathbb{W}^s_p(\mathcal{C})$ სივრცეებთან ერთად გვჭირდება ბესელის პოტენციალთა $\widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathcal{C})$ და სობოლევ-სლობოდეცკის $\widetilde{\mathbb{W}}^s_p(\mathcal{C})$ სივრცეები, სადაც $\mathcal{S}$ არის ჩაკეტილი გლუვი ზედაპირი (საზღვრის გარეშე), რომელიც შეიცავს $\mathcal{C}$-ს როგორც ქვეზედაპირს, $1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$.

სივრცეები $\mathbb{H}^s_p(\mathcal{S})$ და $\mathbb{W}^s_p(\mathcal{S})$ ზოგადად განიმარტებიან ერთეულის დაყოფის საშუალებით $\{\psi_j\}_{j=1}^{\ell}$, რომელიც დაქვემდებარებულია $\mathcal{S}$-ს თავიდან მოცემულ დაფარვაზე $\{Y_j\}_{j=1}^{\ell}$ და ლოკალურ საკოორდინატო დიფეომორფიზმზე (დეტალებისთვის იხ. ტრიბელი, 1995; სიაო & ვენდლანდი, 2008, [70, 45])

$$\varkappa_j : X_j \to Y_j, \qquad X_j \subset \mathbb{R}^2\,, \quad j = 1, \dots, \ell.$$

$\mathbb{W}^s_p(\mathcal{S})$ სივრცე ემთხვევა $\mathbb{H}^{s+\frac{1}{p}}_p(\mathbb{R}^3)$-ს კვალების სივრცეს $\mathcal{S}$-ზე და ცნობილია, რომ $s \geq 0$ და $1 < p < \infty$-სთვის $\mathbb{W}^s(\mathcal{S}) = \mathbb{H}^s(\mathcal{S})$ (იხ. ტრიბელი, 1995, [70]).

ჩვენ ჩვეულებრივ გამოვიყენებთ აღნიშვნას $\mathbb{H}^s(\mathcal{S})$ და $\mathbb{W}^s(\mathcal{S})$ სივრცეებისთვის $\mathbb{H}^s_2(\mathcal{S})$ და $\mathbb{W}^s_2(\mathcal{S})$ (შემთხვევა $p = 2$).

$\widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathcal{C})$ სივრცე განიმარტება როგორც ქვესივრცე $\mathbb{H}^s_p(\mathcal{S})$-სი, რომელიც შეიცავს ფუნქციებს $\varphi \in \mathbb{H}^s_p(\mathcal{S})$, რომლების არიან შეყურსულნი ქვეზედაპირის ჩაკეტვაში $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{\mathcal{C}}$, სადაც $\mathbb{H}^s_p(\mathcal{C})$ აღნიშნავს ფაქტორ-სივრცეს $\mathbb{H}^s_p(\mathcal{C}) := \mathbb{H}^s_p(\mathcal{S})\Big/\widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathcal{C}^c)$, და $\mathcal{C}^c := \mathcal{S} \setminus \overline{\mathcal{C}}$ არის დამატებითი ქვე-

ზედაპირი. $s > 1/p - 1$-სთვის $\mathbb{H}^s_p(\mathcal{C})$ სივრცე შეიძლება გავაიგივოთ ისეთი φ ფუნქციების სივრცესთან $\mathcal{C}$-ზე, რომელტაც აქვთ გაგრძელება $\ell\varphi \in \mathbb{H}^s_p(\mathcal{S})$ დისტრიბუციებამდე, ამიტომაც $\mathbb{H}^s_p(\mathcal{C})$ გაიგივებულია $r_{\mathcal{C}}\mathbb{H}^s_p(\mathcal{S})$ სივრცესთან, სადაც $r_{\mathcal{C}}$ არის $\mathcal{S}$ ზედაპირის შეზღუდვა $\mathcal{C}$ ზედაპირამდე.

$s < 0$-სთვის, სივრცე განიმარტება შეუღლებული სივრცით, ე.ი., $\mathbb{H}^s_p(\mathcal{C}) = (\widetilde{\mathbb{H}}^{-s}_q(\mathcal{C}))'$, სადაც $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. $\widetilde{\mathbb{W}}^s_p(\mathcal{C})$ და $\mathbb{W}^s_p(\mathcal{C})$ სივრცეები განიმარტებიან მსგავსად.

ბესელის პოტენციალთა $\mathbb{H}^s_p(\Gamma)$, $\mathbb{H}^s_p(\Gamma_0)$, $\widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\Gamma_0)$ და სობოლევ-სლობოდეცკის $\mathbb{W}^s_p(\Gamma)$, $\mathbb{W}^s_p(\Gamma_0)$, $\widetilde{\mathbb{W}}^s_p(\Gamma_0)$ სივრცეები ჩაკეტილ Γ კონტურზე და ღია Γ_0 არეზე განიმარტებიან მსგავსად.

შევნიშნოთ, რომ მთელი $m = 1, 2, \ldots$-სთვის ბესელის პოტენციალთა $\mathbb{H}^m_p(\mathcal{S})$ და სობოლევის $\mathbb{W}^m_p(\mathcal{S})$ სივრცეები ერთმანეთს ემთხვევიან და ორივე სივრცეში ექვივალენტური ნორმა განიმარტება გიუნტერის წარმოებულების საშუალებით (იხ. დუდუჩავა 2001, 2006, 2009, [22, 23, 32] და იხილეთ. (1.37) გიუნტერის წარმოებულებისთვის $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$):

$$||u\big|\mathbb{W}^m_p(\mathcal{S})|| := \left[\sum_{|\alpha|\leqslant m} ||\mathcal{D}^\alpha u\big|L_p(\mathcal{S})||^p\right]^{\frac{1}{p}}, \quad \text{სადაც} \quad \mathcal{D}^\alpha := \mathcal{D}_1^{\alpha_1}\mathcal{D}_2^{\alpha_2}\mathcal{D}_3^{\alpha_3}.$$

განვიხილოთ $\widetilde{\mathbb{H}}^{-1}(\mathcal{C})$-ის ქვესივრცე $\widetilde{\mathbb{H}}^{-1}_0(\mathcal{C})$, რომელიც ორთოგონალურია შემდეგის

$$\widetilde{\mathbb{H}}^{-1}_\Gamma(\mathcal{C}) := \left\{f \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}(\mathcal{C}) \ : \ \langle f, \varphi\rangle = 0 \text{ ყველა } \varphi \in C^1_0(\mathcal{C}) - \text{თვის}\right\}.$$

$\widetilde{\mathbb{H}}^{-1}_\Gamma(\mathcal{C})$ შეიცავს ისეთ დისტრიბუციებს $\widetilde{\mathbb{H}}^{-1}(\mathcal{C})$-დან, რომლებიც შეყურსულნი არიან Γ-ზე და $\widetilde{\mathbb{H}}^{-1}(\mathcal{C})$ დაყოფილია შემდეგი ქვესივრცეების პირდაპირ ჯამად:

$$\widetilde{\mathbb{H}}^{-1}(\mathcal{C}) = \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}_\Gamma(\mathcal{C}) \oplus \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}_0(\mathcal{C}).$$

სივრცე $\widetilde{\mathbb{H}}^{-1}_\Gamma(\mathcal{C})$ არის არატრივიალური (იხ. [45, § 5.1]) და თუ მარჯვენა მხარე f არჩეულია ორთოგონალური ქვესირციდან, სივრცე $\widetilde{\mathbb{H}}^{-1}_0(\mathcal{C})$ უზრუნველყოფს სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობას (იხ. [45]).

ვთქვათ $\mathcal{S}$ ჩაკეტილი საკმარისად გლუვი ორიენტირებული ზედაპირი $\mathbb{R}^n$-ში. ჩვენ გამოვიყენებთ აღნიშვნას $\mathbb{X}^s_p(\mathcal{S})$ ან ბესელის პოტენციალთა $\mathbb{H}^s_p(\mathcal{S})$ ან სობოლევ-სლობოდეცკის $\mathbb{W}^s_p(\mathcal{S})$ სივრცეებისთვის ჩაკეტილი ან ღია $\mathcal{S}$-სთვის და მსგავს აღნიშვნას $\widetilde{\mathbb{X}}^s_p(\mathcal{S})$ ღია $\mathcal{S}$-სთვის.

განვიხილოთ სივრცე

$$\mathbb{X}^s_{p,\#}(\mathcal{S}) := \left\{\varphi \in \mathbb{X}^s_p(\mathcal{S}) \ : \ (\!(\varphi, 1)\!) = 0\right\}, \tag{3.66}$$

სადაც $(\!(\cdot, \cdot)\!)$ აღნიშნავს შეუღლებული სივრცეების დუალობას. ცხადია, რომ $\mathbb{X}^s_{p,\#}(\mathcal{S})$ არ შეიცავს მუდმივებს: თუ $c_0 = \mathrm{const} \in \mathbb{X}^s_{p,\#}(\mathcal{S})$ მაშინ

$$0 = (\!(c_0, 1)\!) = c_0(\!(1, 1)\!) = c_0 \mathrm{mes}\, \mathcal{S}$$

და $c_0 = 0$. უფრო მეტიც, $\mathbb{X}^s_p(\mathcal{S})$ იყოფა პირდაპირ ჯამად

$$\mathbb{X}^s_p(\mathcal{S}) = \mathbb{X}^s_{p,\#}(\mathcal{S}) + \{\mathrm{const}\} \tag{3.67}$$

და დუალური (შეუღლებული) სივრცე არის

$$(\mathbb{X}^s_{p,\#}(\mathcal{S}))^* = \mathbb{X}^{-s}_{p',\#}(\mathcal{S}), \qquad p' := \frac{p}{p-1}. \tag{3.68}$$

გავიხსენოთ, რომ $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ და $\mathfrak{B}_2$ აღნიშნავენ ბანახის სივრცეებს. ხოლო $\mathcal{L}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ აღნიშნავს წრფივი შემოსაზღვრული ოპერატორების $\boldsymbol{A} : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ სიმრავლეს. თუ $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$, ვხმარობთ შემოკლებულ აღნიშვნას $\mathcal{L}(\mathfrak{B}) := \mathcal{L}(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$. ერთგვაროვანი განტოლების $Ax = 0$ ამონახსნთა სიმრავლისათვის $x \in \mathfrak{B}_1$ გვაქვს აღნიშვნა $\operatorname{Ker} A$. ცხადია, რომ წრფივი ოპერატორისათვის $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ სიმრავლე $\operatorname{Ker} A$ წრფივია და ჩაკეტილი სივრცეში $\mathfrak{B}_1$.

წრფივი სიმრავლეა ოპერატორის ანასახიც $\Im A := \{Ax \; : \; x \in \mathfrak{B}_1\}$ სივრცეში $\mathfrak{B}_2$, მაგრამ არა აუცილებლად ჩაკეტილი. აღნიშვნა $\operatorname{Coker} A := \mathfrak{B}_2/\Im A$ (ან კიდევ $\operatorname{Coker} A_{\mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2}$) გამოიყენება ფაქტორ-სივრცისათვის ალგებრული გაგებით, ე.ი. ნორმის, მეტრიკის ან თუნდაც ტოპოლოგიის, გაუთვალისწინებლად.

თუ სიმრავლე $\mathbb{M} \subset \mathfrak{B}^*$ ორთოგონალურია სიმრავლის $\mathbb{X} \subset \mathfrak{B}$

$$\langle F, x \rangle = 0 \qquad \forall F \in \mathbb{M}\,, \qquad \forall x \in \mathbb{X}$$

ჩვენ ვიხმართ შემოკლებულ აღნიშვნას $\mathbb{M} = \mathbb{X}^{\perp}$.

ოპერატორს $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ ბანახის სივრცეთა წყვილში $\mathfrak{B}_1$ და $\mathfrak{B}_2$ ეწოდება **ნორმალურად ამოხსნადი** თუ მისი ანასახი $\Im A$ წარმოადგენს ჩაკეტილ ქვესივრცეს $\mathfrak{B}_2$ სივრცეში.

ლემა 3.2. *ოპერატორისათვის $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ ბანახის სივრცეთა წყვილში $\mathfrak{B}_1$ და $\mathfrak{B}_2$ და მისი შეუღლებული ოპერატორისათვის $A^* \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}_2^*, \mathfrak{B}_1^*)$ ტოლობას*

$$\operatorname{Ker} A^* = A(\mathfrak{B}_1)^{\perp} = (\Im A)^{\perp}\,, \tag{3.69}$$

ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ნორმალურად ამოხსნადია $\Im A = \overline{\Im A}$.

ამასთან ერთად, თუ A ნორმალურად ამოხსნადია, შეუღლებული ოპერატორი A^* ასევე ნორმალურად ამოხსნადია: $\Im A^*$ წარმოადგენს ჩაკეტილ ქვესივრცეს $\mathfrak{B}_1^*$ სივრცეში და

$$\Im A^* = (\operatorname{Ker} A)^{\perp}\,. \tag{3.70}$$

ლემა 3.3. *დავუშვათ, რომ $\mathfrak{B}_1$ და $\mathfrak{B}_2$ წარმოადგენენ ბანახის სივრცეებს და ოპერატორი $\boldsymbol{A} \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$. აკმაყოფილებს უტოლობას*

$$\|u\big|\mathfrak{B}_1\| \leqslant C\|Au\big|\mathfrak{B}_2\| + C\|Tu\big|\mathfrak{B}_2\| \qquad \forall u \in \mathfrak{B}_1 \tag{3.71}$$

რაიმე კომპაქტური ოპერატორით $T \in \mathcal{C}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ და რაიმე მუდმივით $C > 0$. მაშინ A არის ნორმალურად ამოხსნადი და გააჩნია სასრულგანზომილებიანი ბირთვი $\dim \operatorname{Ker} A < \infty$.

შედეგი 3.4. *თუ ოპერატორი T კომპაქტურია ბანახის სივრცეში $T \in \mathcal{C}(\mathfrak{B})$, მაშინ ოპერატორი $I+T$ ნორმალურად ამოხსნადია და ბირთვები $\mathrm{Ker}\,(I+T)$ და $\mathrm{Ker}\,(I+T^*)$ ორივე სასრულგანზომილებიანია.*

განსაზღვრება 3.5. *ვიტყვით რომ ოპერატორი $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ არის* **ფრედჰოლმის** *(ან კიდევ,* **გააჩნია ფრედჰოლმის თვისება***) და ჩავწერთ $A \in \mathcal{F}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$, თუ A ოპერატორს გააჩნია სასრულგანზომილებიანი ბირთვი და კობირთვი:*

$$\dim \mathrm{Ker}\, A < \infty\,, \qquad \dim \mathrm{Coker}\, A < \infty\,.$$

ფრედჰოლმის ოპერატორს გააჩნია სასრული **ინდექსი**

$$\mathrm{Ind}\ A = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2} A := \dim \mathrm{Ker}\, A - \dim \mathrm{Coker}\, A \tag{3.72}$$

რომელიც არის დადებითი, უარყოფითი ან ნულის ტოლი მთელი რიცხვი $\mathrm{Ind}\ :\ \mathcal{F}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) \to \mathbb{Z}$.

თეორემა 3.6. *თუ $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ ფრედჰოლმის ოპერატორია $A \in \mathcal{F}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$, მაშინ მისი შეუღლებული $A^* \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}_2^*, \mathfrak{B}_1^*)$ აგრეთვე ფრედჰოლმის ოპერატორია $A^* \in \mathcal{F}(\mathfrak{B}_2^*, \mathfrak{B}_1^*)$ და*

$$\mathrm{Ind}\ A = \dim \mathrm{Ker}\, A - \dim \mathrm{Ker}\, A^* = -\,\mathrm{Ind}\ A^*\,. \tag{3.73}$$

შედეგი 3.7. *ბანახის $\mathfrak{B}$ სივრცეში კომპაქტური ოპერატორის $T \in \mathcal{C}(\mathfrak{B})$, ჯამი ერთეულოვან ოპერატორთან $I+T \in \mathcal{F}(\mathfrak{B})$ წარმოადგენს ფრედჰოლმის ოპერატორს.*

ლემა 3.8. *ფრედჰოლმის ოპერატორისათვის $A \in \mathcal{F}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ ბანახის სივრცეთა წყვილში არსებობს ოპერატორი $R \in \mathcal{F}(\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1)$ ისეთი, რომ*

$$RA = I - P_1\,, \qquad AR = I - P_2\,, \tag{3.74}$$

სადაც I ერთეულოვანი ოპერატორია, ხოლო $P_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}_1)$, $P_2 \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}_2)$ წარმოადგენენ სასრული რანგის პროექტორებს შესაბამის ბანახის სივრცეებში: $P_j^2 = P_j$, $\dim \Im\, P_j < \infty$, $j = 1, 2$.

უფრო მეტიც, $\Im\,(I - P_2) = \Im\, A$, $\Im\, P_1 = \mathrm{Ker}\, A$ და R წარმოადგენს A ოპერატორის ფსევდოშებრუნებულს:

$$ARA = A - AP_1 = A\,. \tag{3.75}$$

განსაზღვრება 3.9. *ოპერატორს $R \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1)$ ბანახის სივრცეებს შორის ეწოდება ოპერატორის $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$* **რეგულარიზატორი***, თუ შესრულებულია ტოლობები*

$$RA = I + T_1\,, \qquad AR = I + T_2\,. \tag{3.76}$$

აქ I არის ერთეულოვანი ოპერატორი, ხოლო $T_1 \in \mathcal{C}(\mathfrak{B}_1)$ და $T_2 \in \mathcal{C}(\mathfrak{B}_2)$ არიან კომპაქტური ოპერატორები.

ლემა 3.10. *ოპერატორს* $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ *ბანახის სივრცეებს შორის გააჩნია რეგულარიზა-ტორი* $R \in \mathcal{F}(\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1)$ *მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც ეს ოპერატორი ფრედჰოლმისაა* $A \in \mathcal{F}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$.

3.2. ლოკალური პრინციპი

"კოეფიციენტების გაყინვის"მეთოდი კარგად ცნობილი და ფართედ გამოყენებადი მიდგომაა დიფერენციალური და ინტეგრალური განტოლებების თეორიაში. მოხერხებულია მოვახდინოთ ამ მეთოდის ფორმალიზაცია ლოკალური პრინციპის სახით.

განსაზღვრება 3.11. სიმრავლეს $\Delta \subset \mathfrak{A}$ ბანახის ალგებრაში $\mathfrak{A}$ ეწოდება მალოკალიზებელი კლასი, თუ:

- **i)** $0 \notin \Delta$**;**
- **ii) ელემენტთა ნებისმიერი წყვილისათვის** $a_1, a_2 \in \Delta$ **არსებობს ისეთი ელემენტი** $a \in \Delta$**, რომ** $a_m a = a a_m = a$, $m = 1, 2$**.**

შევნიშნოთ, რომ ალგებრის $\mathfrak{A}$ ნებისმიერი ქვესიმრავლე რომელიც შეიცავს ნულოვან ელემენტს 0, გააჩნია მალოკალიზებელი კლასის მეორე თვისება (ii), მაგრამ პირველი თვისება გამორიცხავს ასეთ მალოკალიზებელ კლასს რადგან ის ტრივიალურია.

განსაზღვრება 3.12. *ვთქვათ $\Delta \in \mathfrak{A}$ წარმოადგენს მალოკალიზებელ კლასს ბანახის ალგებრაში $\mathfrak{A}$. ორ ელემენტს ალგებრიდან $x, y \in \mathfrak{A}$ ეწოდება* **ლოკალურად Δ-ექვივალენტური მარცხნიდან** *(***ლოკალურად Δ-ექვივალენტური მარჯვნიდან** *და ჩავწერთ $x \overset{L-\Delta}{\sim} y$ (ჩავწერთ შესაბამისად $x \overset{R-\Delta}{\sim} y$), თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა:*

$$\inf_{a\in\Delta} \|(x-y)a\big|\mathfrak{A}\| = 0 \quad \left(\text{ან, შესაბამისად,} \qquad \inf_{a\in\Delta} \|a(x-y)\big|\mathfrak{A}\| = 0\right).$$

თუ x და y არიან ლოკალურად ექვივალენტური მარჯვნიდან და მარცხნიდან ვიტყვით, რომ ეს ელემენტები არიან **ლოკალურად Δ-ექვივალენტური** *და ჩავწერთ $x \overset{\Delta}{\sim} y$.*

მომდევნო ლემაში ჩამოთვლილი ლოკალურად ექვივალენტობის თვისებები.

ლემა 3.13. *ლოკალურად ექვივალენტობის დამოკიდებულებები (მარჯვენა, მარცხენა და ორმხრივი) წარმოადგენენ წრფივს, უწყვეტს და მულტიპლიკატიურს:*

i. (წრფივობა) მოცემული მალოკალიზებელი კლასისათვის $\Delta \subset \mathfrak{A}$ და ელემენტებისათვის $x_k, y_k \in \mathfrak{A}$,, რომლებიც ექვივალენტურია $x_k \overset{R-\Delta}{\sim} y_k$, $(x_k \overset{L-\Delta}{\sim} y_k)$, $k = 1, 2$, ადგილი აქვს შემდეგ ექვივალენტურ დამოკიდებულებებს $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \overset{R-\Delta}{\sim} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \overset{L-\Delta}{\sim} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$ $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$;

ii. (უწყვეტობა) მოცემული მალოკალიზებელი კლასისათვის $\Delta \subset \mathfrak{A}$ და ელემენტებისათვის $x_m, y_m \in \mathfrak{A}$, რომლებიც ექვივალენტურია $x_m \overset{R-\Delta}{\sim} y_m$, $(x_m \overset{L-\Delta}{\sim} y_m)$, $m \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x$ და $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = y$, შეიძლება ზღვარზე გადასვლა $x \overset{R-\Delta}{\sim} y$ $(x \overset{L-\Delta}{\sim} y)$;

iii. (მულტიპლიკატიურობა) თუ მოცემული მალოკალიზებელი კლასისათვის $\Delta \subset \mathfrak{A}$ ელემენტები $x, y \in \mathfrak{A}$ ექვივალენტურია $x \overset{L-\Delta}{\sim} y$ ($x \overset{R-\Delta}{\sim} y$), და ელემენტი $c \in \mathfrak{A}$ ნებისმიერი, ექვივალენტურია ნამრავლიც $cx \overset{L-\Delta}{\sim} cy$ ($xc \overset{R-\Delta}{\sim} yc$).

განსაზღვრება 3.14. *ვთქვათ $\Delta \in \mathfrak{A}$ წარმოადგენს მალოკალიზებელ კლასს ბანახის ალგებრაში $\mathfrak{A}$. ელემენტს $x \in \mathfrak{A}$ ეწოდება* **ლოკალურად Δ-შებრუნებადი მარცხნიდან** *(***ლოკალურად Δ-შებრუნებადი მარჯვნიდან***), თუ არსებობს ისეთი $z \in \mathfrak{A}$ და ისეთი $a \in \Delta$, რომ შესრულდება შემდეგი ტოლობა: $zxa = a$ (შესაბამოსად, $axz = a$). თუ ელემენტი $x \in \mathfrak{A}$ არის ლოკალურად Δ-შებრუნებადი მარცხნიდან და, იმავდროულად, ლოკალურად Δ- შებრუნებადი მარჯვნიდან, ვიტყვით რომ ის არის* **ლოკალურად Δ-შებრუნებადი**.

ლემა 3.15. *ვთქვათ $\Delta \in \mathfrak{A}$ წარმოადგენს მალოკალიზებელ კლასს ბანახის ალგებრაში $\mathfrak{A}$ და ელემენტები $x, y \in \mathfrak{A}$, არიან ლოკალურად Δ-ექვივალენტური $x \overset{L-\Delta}{\sim} y$ ($x \overset{R-\Delta}{\sim} y$).*

თუ x არის Δ-შებრუნებადი მარცხნიდან (არის Δ-შებრუნებადი მარჯვნიდან), მაშინ y არის Δ-შებრუნებადი მარცხნიდან (არის Δ-შებრუნებადი მარჯვნიდან).

დამტკიცება: ვთქვათ x არის Δ-შებრუნებადი მარცხნიდან და $x \overset{L-\Delta}{\sim} y$. მაშინ არსებობენ ისეთი ელემენტები $z \in \mathfrak{A}$, $a_1, a_2 \in \Delta$, რომ შესრულდება ტოლობა $zxa_1 = a_1$ და $\|z(x-y)a_2|\mathfrak{A}\| \leqslant \|z|\mathfrak{A}\|\|(x-y)a_2|\mathfrak{A}\| < 1$. უფრო მეტიც, განვიხილოთ ელემენტი $a \in \Delta$ შემდეგი თვისებებით $a_1 a = a_2 a = a$. მაშინ $zya = zxa - ua$, სადაც $u = z(x-y)a_2$. ტოლობების $zxa = zxa_1 a = a_1 a = a$ გამოყენებით მივიღებთ $zya = (e-u)a$. რადგან $\|u|\mathfrak{A}\| < 1$ ელემენტს $e-u$ გააჩნია შებრუნებული $(e-u)^{-1}$ და $z_1 ya = a$ თუ $z_1 = (e-u)^{-1}z$. მაშასადამე, y არის Δ-შებრუნებადი მარცხნიდან.

შემთხვევა როდესაც ელემენტი Δ-შებრუნებადია მარჯვნიდან, სავსებით ანალოგიურია. $\square$

განსაზღვრება 3.16. *მალოკალიზებელი კლასების სისტემას $\{\Delta_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ ალგებრაში $\mathfrak{A}$ ეწოდება* **დამფარავი** *თუ ელემენტების ნებისმიერი კოლექციისათვის $\{a_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, $a_\omega \in \Delta_\omega$, შეიძლება შეირჩეს ელემენტთა ისეთი სასრული კოლექცია $\{a_{\omega_j}\}_{j=1}^N$, რომ მათი ჯამი $\sum_{j=1}^N a_{\omega_j}$ იქნება შებრუნებადი ალგებრაში $\mathfrak{A}$.*

ლემა 3.17. *დავუშვათ, რომ $\{\Delta_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ წარმოადგენს მალოკალიზებელი კლასების $\Delta_\omega \subset \mathfrak{A}$ დამფარავ სისტემას $\mathfrak{A}$ ალგებრაში და ელემენტი $x \in \mathfrak{A}$ იყოს გადასმადი (კომუტირებდეს) მალოკალიზებელი კლასების ყველა წარმომადგენელთან: $ax = xa$ ყველა ელემენტისათვის $a \in \cup_{\omega\in\Omega}\Delta_\omega$.*

მაშინ x შებრუნებადია მარცხნიდან (შებრუნებადია მარჯვნიდან) მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც x ლოკალურად Δ_ω-შებრუნებადია მარცხნიდან (ლოკალურად Δ_ω-შებრუნებადია მარჯვნიდან) ინდექსის ყველა მნიშვნელობისათვის.

დამტკიცება: პირობის აუცილებლობა ცხადია ,რადგან თუ ელემენტი შებრუნებადია ის იქნება ლოკალურად შებრუნებადი. ასე რომ დასამტკიცებელია მხოლოდ პირობის საკმარისობა.

ვთქვათ, x არის ლოკალურად Δ_ω-შებრუნებადი მარცხნიდან ყველა $\omega \in \Omega$. არსებობენ ელემენტები $z_\omega \in \mathfrak{A}$ და $a_\omega \in \Delta_\omega$ ისეთი, რომ $z_\omega x a_\omega = a_\omega$. რადგან სისტემა $\{\Delta_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ დამფარავია, შეირჩევა ელემენტთა სასრული რაოდენობა $a_{\omega_1}, \cdots, a_{\omega_N}$ ისე, რომ ჯამი $\sum_{m=1}^N a_{\omega_m}$ იქნება შებრუნებადი. განვიხილოთ $u = \sum_{m=1}^N z_{\omega_m} a_{\omega_m}$ და გამოვიყენოთ მოთხოვნილი კომუტატიურობა $x a_{\omega_m} = a_{\omega_m} x$, $m = 1, \cdots, N$, რის შედეგადაც მივიღებთ შემდეგს:

$$ux = \sum_{m=1}^N z_{\omega_m} a_{\omega_m} x = \sum_{m=1}^N z_{\omega_m} x a_{\omega_m} = \sum_{m=1}^N a_{\omega_m}\,.$$

მაშასადამე, ელემენტი x შებრუნებადია მარცხნიდან და შებრუნებულია

$$x^{-1} = \left(\sum_{m=1}^N a_{\omega_m}\right)^{-1} u.$$

შემთხვევა როდესაც ელემენტი შებრუნებადია მარჯვნიდან, სავსებით ანალოგიურად მტკიცდება. □

შემდეგი თეორემა წარმოადგენს ორი წინამორბედი ლემის პირდაპირ შედეგს.

თეორემა 3.18. (ლოკალური პრინციპი). *ვთქვათ, $\{\Delta_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ წარმოადგენს მალოკალიზებელი კლასების დამფარავ სისტემას ალგებრაში $\mathfrak{A}$, ხოლო ელემენტები $x \in \mathfrak{A}$ და $y_\omega \in \mathfrak{A}$ ლოკალურად Δ_ω-ექვივალენტურია მარცხნიდან (ლოკალურად Δ_ω-ექვივალენტურია მარჯვნიდან) ინდექსების ყველა მნიშვნელობისათვის $\omega \in \Omega$.*

ვთქვათ, $xu = ux$ ყველა $u \in \Delta_\omega$, $\omega \in \Omega$. მაშინ x არის შებრუნებადი მარცხნიდან (x არის შებრუნებადი მარჯვნიდან) მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც ელემენტების y_ω არიან Δ_ω-შებრუნებადი მარცხნიდან (არიან Δ_ω-შებრუნებადი მარჯვნიდან) ყველა $\omega \in \Omega$.

3.3. პოტენციალური ოპერატორები და სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებები ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის

შემდეგი თეორემა წარმადგენს თეორემა 10-ის ნაწილს, რომელიც დამტკიცებულია სტატიაში: დუდუჩავა, 2014, [36].

თეორემა 3.19. *ვთქვათ $\mathcal{S}$ არის ℓ-გლუვი, $\ell = 1, 2, \dots$, $1 < p < \infty$, და $|s| \leqslant \ell$. ვთქვათ $\mathbb{X}^s_{p,\#}(\mathcal{S})$-სთვის სრულდება* (3.66)-(3.68) *თვისებები.*

ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორი $\Delta_{\mathcal{S}} := \mathrm{div}_{\mathcal{S}} \nabla_{\mathcal{S}}$ შებრუნებადია სივრცეებს შორის, რომლებიც არ შეიცავენ მუდმივებს

$$\Delta_{\mathcal{S}} \; : \; \mathbb{X}^{s+1}_{p,\#}(\mathcal{S}) \to \mathbb{X}^{s-1}_{p,\#}(\mathcal{S}), \tag{3.77}$$

ე.ი გააჩნია ფუნდამენტური ამონახსნი $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$ (3.77) *დასმით.*

ვთქვათ $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ არის ქვეზედაპირი გლუვი $\Gamma := \partial\mathcal{C}$ საზღვრით. ლაპლას-ბელტრამის ფუნდამენტურ ამონახსნთან $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$ ერთად შეგვიძლია განვიხილოთ ნიუტონის, მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალები $\mathcal{C}$ ზედაპირზე:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} v(x) &:= \int_{\mathcal{C}} \mathcal{K}_{\mathcal{S}}(x, y) v(y)\, d\sigma \\
\boldsymbol{V}_{\Gamma} v(x) &:= \int_{\Gamma} \mathcal{K}_{\mathcal{S}}(x, \tau) v(\tau) d\tau, \\
\boldsymbol{W}_{\Gamma} v(x) &:= \int_{\Gamma} \partial_{\boldsymbol{\nu}_{\Gamma}(\tau)} \mathcal{K}_{\mathcal{S}}(x, \tau) v(\tau) d\tau, \qquad x \in \mathcal{C}.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

ზემოთ განმარტებულ პოტენციალურ ოპერატორებს გააჩნიათ შემდეგი შემოსაზღვრულობის თვისებები

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} \;&:\; \mathbb{H}^s_{p,\#}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{H}^{s+2}_{p,\#}(\mathcal{C})\,, \\
\boldsymbol{V}_{\Gamma} \;&:\; \mathbb{H}^s_{p,\#}(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{H}^{s+1+\frac{1}{p}}_{p,\#}(\mathcal{C})\,, \\
\boldsymbol{W}_{\Gamma} \;&:\; \mathbb{H}^s_{p,\#}(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{H}^{s+\frac{1}{p}}_{p,\#}(\mathcal{C})
\end{aligned}$$

და შერეული სასაზღვრო ამოცანის (1.25) ნებისმიერი ამონახსნი $\mathbb{H}^1_{\#}(\mathcal{C}) := \mathbb{H}^1_{2,\#}(\mathcal{C})$ სივრცეში წარმოიდგინება შემდეგი ფორმულით:

$$u(x) = \boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} f(x) + \boldsymbol{W}_{\Gamma} u^+(x) - \boldsymbol{V}_{\Gamma}[\partial_{\boldsymbol{\nu}_{\Gamma}} u]^+(x) \qquad u \in \mathbb{H}^1_{\#}(\mathcal{C}), \quad x \in \mathcal{C} \tag{3.79}$$

(იხ. სტატიები: დუდუჩავა, ნატროშვილი შარგოროდსკი, 1995; დუდუჩავა, 2001, [33, 22]). (3.79)-ში სიმკვრივეები წარმოადგენენ u ამონახსნის დირიხლეს u^+ და ნეიმანის $[\partial_{\boldsymbol{\nu}_{\Gamma}} u]^+$ კვალებს საზღვარზე.

ვინაიდან $\mathbb{X}_p^s = \mathbb{X}_{p,\#}^s + \{\mathrm{const}\}$, ჩვენ შეგვიძლია ფენოვანი პოტენციალები გავაგრძელოთ მთელს სივრცეზე შემდეგნაირად:

$$\varphi = \varphi_0 + c, \qquad \varphi_0 \in \mathbb{X}_{p,\#}^s, \quad c = \mathrm{const},$$

$$\text{განვმარტოთ} \quad \boldsymbol{V}_\Gamma \varphi = \boldsymbol{V}_\Gamma \varphi_0 + c, \quad \boldsymbol{W}_\Gamma \varphi = \boldsymbol{W}_\Gamma \varphi_0 + c, \tag{3.80}$$

$$\boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} \varphi = \boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} \varphi_0 + c,$$

ე.ი. პირობებით $\boldsymbol{V}_\Gamma c = \boldsymbol{W}_\Gamma c = \boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} c = c$.

ლემა 3.20. (3.79) *წარმოდგენის ფორმულა სამართლიანია ამონახსნისათვის* $\mathbb{H}^1(\mathcal{C})$ *სივრცეში, სადაც პოტენციალები გაგრძელებულია როგორც* (3.80)*-ში.*

დამტკიცება: ვინაიდან $u = u_0 + c$, $u_0 \in \mathbb{H}_{p,\#}^s(\mathcal{C})$, $u \in \mathbb{H}_p^s(\mathcal{C})$, გამოვიყენებთ პოტენციალის გაგრძელებას (3.80) წარმოდგენის ფორმულაში (3.79) ამონახსნისთვის $\mathbb{H}_\#^1(\mathcal{C})$ სივრცეში და მივიღებთ წარმოდგენის ფორმულას (3.79) ამონასხნისთვის $\mathbb{H}^1(\mathcal{C})$ სივრცეში:

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0(x) + c = \boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} f_0(x) + \boldsymbol{W}_\Gamma u_0^+(x) - \boldsymbol{V}_\Gamma [\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} u_0]^+(x) + c \\ &= \boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} (f_0(x) - c) + \boldsymbol{W}_\Gamma (u - c)^+(x) - \boldsymbol{V}_\Gamma [\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} (u - c)]^+(x) \\ &= \boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} f(x) + \boldsymbol{W}_\Gamma u^+(x) - \boldsymbol{V}_\Gamma [\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} u]^+(x), \qquad u \in \mathbb{H}^1(\mathcal{C}), \quad x \in \mathcal{C}. \end{aligned} \tag{3.81}$$

□

თეორემა 1.10-ის დამტკიცება: მოვიყვანოთ პლემელის ფორმულები

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{W}_\Gamma v)^\pm(t) = \pm\frac{1}{2} v(t) + \boldsymbol{W}_{\Gamma,0} v(t), \quad (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \boldsymbol{W}_\Gamma \psi)^\pm(t) = \boldsymbol{V}_{\Gamma,+1} v(t), \\ &(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \boldsymbol{V}_\Gamma v)^\pm(t) = \mp\frac{1}{2} v(t) + \boldsymbol{W}_{\Gamma,0}^* v(t), \quad (\boldsymbol{V}_\Gamma v)^\pm(t) = \boldsymbol{V}_{\Gamma,-1} v(t), \end{aligned} \tag{3.82}$$

სადაც $t \in \partial\Omega_\alpha$ და

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_{\Gamma,-1} v(t) &:= \int_\Gamma \mathcal{K}_{\mathcal{S}}(t,\tau) v(\tau) d\tau, \\ \boldsymbol{W}_{\Gamma,0} v(t) &:= \int_\Gamma (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma(\tau)} \mathcal{K}_{\mathcal{S}})(t,\tau) v(\tau) d\tau, \\ \boldsymbol{W}_{\Gamma,0}^* w(t) &:= \int_\Gamma (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma(t)} \mathcal{K}_{\mathcal{S}})(t,\tau) w(\tau) d\tau, \\ \boldsymbol{V}_{\Gamma,+1} w(t) &:= \int_\Gamma (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma(t)} \partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma(\tau)} \mathcal{K}_{\mathcal{S}})(t,\tau) w(\tau) d\tau, \qquad t \in \Gamma, \end{aligned} \tag{3.83}$$

არიან ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორები Γ-ზე, აქვთ -1, 0, 0 და $+1$ რიგი შესაბამისად და წარმოადგენენ შესაბამისი პოტენციალების პირდაპირ მნიშვნელობას $\boldsymbol{V}_\Gamma$, $\boldsymbol{W}_\Gamma$, $\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \boldsymbol{V}_\Gamma$ და $\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \boldsymbol{W}_\Gamma$.

ვთქვათ $g_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1/p}(\Gamma)$ და $h_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\Gamma)$ წარმოადგენენ სასაზღვრო მნიშვნელობების $g \in \mathbb{W}_p^{s-1/p}(\Gamma_D)$ და $h \in \mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\Gamma_N)$ რაიმე ფიქსირებულ გაგრძელებას (არა-კლასიკური

ფორმულირება), განსაზღვრულს საზღვრის $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ ნაწილზე. ვინაიდან ორ ასეთ გაგრძელებას შორის სხვაობა ეკუთვნის $\widetilde{\mathbb{W}}{}^{s-1/p}_p(\Gamma_N)$ და $\widetilde{\mathbb{W}}{}^{s-1-1/p}_p(\Gamma_D)$ სივრცეებს შესაბამისად, უნდა ვეძებოთ ორი უცნობი ფუნქცია $\varphi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}{}^{s-1/p}_p(\Gamma_N)$ და $\psi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}{}^{s-1-1/p}_p(\Gamma_D)$ ისეთი, რომ $g_0 + \varphi_0$ და $h_0 + \psi_0$-სთვის (1.1)-ში მოცემული სასაზღვრო პირობები შესრულდეს მთელ საზღვარზე

$$\begin{gathered} u^+(t) = g_0(t) + \varphi_0(t) = \begin{cases} g(t) & \text{if} \quad t \in \Gamma_D, \\ g_0(t) + \varphi_0(t) & \text{if} \quad t \in \Gamma_N, \end{cases} \\ (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} u)^+(t) = h_0(t) + \psi_0(t) = \begin{cases} h_0(t) + \psi_0(t) & \text{if} \quad t \in \Gamma_D, \\ h(t) & \text{if} \quad t \in \Gamma_N, \end{cases} \end{gathered} \tag{3.84}$$

$u(x)$ არის სასაზღვრო ამოცანის (1.25) ამონახსნი.

(1.25) სასაზღვრო ამოცანის (3.84) ამონახსნის სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით წარმოდგენის ფორმულაში (3.81) (იხ. ლემა 3.20) მივიღებთ ამონახსნის შემდეგი წარმოდგენის ფორმულას:

$$u(x) = \boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} f(x) + \boldsymbol{W}_\Gamma[g_0 + \varphi_0](x) - \boldsymbol{V}_\Gamma[h_0 + \psi_0](x), \qquad x \in \mathcal{C}, \tag{3.85}$$

სადაც

$$g_0 \in \mathbb{W}^{s-1/p}_p(\Gamma), \; h_0 \in \mathbb{W}^{s-1-1/p}_p(\Gamma), \; \varphi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}{}^{s-1/p}_p(\Gamma_N), \; \psi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}{}^{s-1-1/p}_p(\Gamma_D).$$

(3.82) პლემელის ფორმულების გამოყენებით (3.85)-ში და მათი გათვალისწინებით (3.84)-ში მივიღებთ შემდეგს:

$$\begin{cases} g_0(t) + \varphi_0(t) = u^+(t) = (\boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} f)^+ + \dfrac{1}{2}(g_0(t) + \varphi_0(t)) \\ \qquad\qquad + \boldsymbol{W}_{\Gamma,0}[g_0 + \varphi_0](t) - \boldsymbol{V}_{\Gamma,-1}[h_0 + \psi_0](t), \\ h_0(t) + \psi_0(t) = (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} u)^+(t) = (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} f)^+ + \boldsymbol{V}_{\Gamma,+1}[g_0 + \varphi_0](t) \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}(h_0(t) + \psi_0(t)) - \boldsymbol{W}^*_{\Gamma,0}[h_0 + \psi_0](t), \qquad t \in \Gamma. \end{cases}$$

ვთქვათ r_D და r_N არიან შეზღუდვის ოპერატორები Γ_D-სა და Γ_N-ის შესაბამისად. თუ ჩვენ გამოვიყენებთ r_N-ს პირველ განტოლებაში და r_D-ს მეორე განტოლებაში, მივიღებთ (1.30) სისტემას, სადაც

$$\begin{aligned} G_0 &:= r_N \left[(\boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} f)^+ - \frac{1}{2} g_0 + \boldsymbol{W}_{\Gamma,0} g_0 - \boldsymbol{V}_{\Gamma,-1} h_0 \right] \in \mathbb{W}^{s-1/p}_p(\Gamma_N), \\ H_0 &:= r_D \left[(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} f)^+ - \frac{1}{2} h_0 + \boldsymbol{V}_{\Gamma,+1} g_0 - \boldsymbol{W}^*_{\Gamma,0} h_0 \right] \in \mathbb{W}^{s-1-1/p}_p(\Gamma_D). \end{aligned} \tag{3.86}$$

ამდენად, ჩვენ დავამტკიცეთ თეორემა 1.10-ის შებრუნებული მტკიცება: თუ u არის (1.25) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი, φ_0 და ψ_0 ფუქციები წარმოადგენენ (1.30)-სისტემის ამონახსნებს.

პირდაპირი დებულება უფრო მატივად დასამტკიცებელია:

- (3.81)-ში მოცემული ფუქცია, წარმოდგენილი პოტენციალების საშუალებით, აკმაყოფილებს (1.25) განტოლებას.

- თუ φ_0 და ψ_0 არიან (1.30) სისტემის ამონახსნები, (3.82) პლემელის ფორმულის გამოყენებით ადვილად შეიძლება შემოწმდეს, რომ u ამონახსნი (3.81)-ში აკმაყოფილებს (1.25) ამოაცანის სასაზღვრო პირობებს.

(1.25) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა (1.26) კლასიკური დასმით დასმულია 1.8 თეორემაში, მაშინ, როცა (1.30) სისტემისთვის გამომდინარეობს სასაზღვრო ამოცანის (1.25) ექვივალენტობიდან. □

გამოკვლევის დარჩენილი ნაწილი ეძღვნება (1.30) სისტემის ამოხსნადობის თვისებების დამტკიცებას (1.27) არაკლასიკური დასმით.

2-განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეზე განვიხილოთ შემდეგი განტოლება

$$\Delta u = f^0 \qquad \text{on} \quad \mathbb{R}^2, \qquad u \in \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^2), \quad f^0 \in \mathbb{H}^{s-2}_p(\mathbb{R}^2), \tag{3.87}$$

ასევე დირიხლეს მოდელური

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f_0(x), & x \in \mathbb{R}^2_+, \\ u^+(t) = g_0(t), & t \in \partial\mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.88}$$

ნეიმანის მოდელური

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f_0(x), & x \in \mathbb{R}^2_+, \\ -(\partial_2 u)^+(t) = h_0(t), & t \in \partial\mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.89}$$

და შერეული მოდელური

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f_1(x), & x \in \mathbb{R}^2_+, \\ u^+(t) = g_1(t), & t \in \mathbb{R}^- := (-\infty, 0), \\ -(\partial_2 u)^+(t) = h_1(t), & t \in \mathbb{R}^+ := (0, \infty), \end{cases} \tag{3.90}$$

სასაზღვრო ამოცანები ლაპლასის განტოლებისათვის ზედა ნახევარსიბრტყეში $\mathbb{R}^2_+ := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, სადაც $\partial_{\nu_\Gamma} = -\partial_2$ არის ნორმალური წარმოებული $\mathbb{R}^2_+$-ის საზღვარზე.

(3.88) და (3.89) სასაზღვრო ამოცანები განხილული იქნება არაკლასიკური დასმით:

$$\begin{gathered} f_0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^{s-2}_p(\mathbb{R}^2_+) \cap \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}_0(\mathbb{R}^2_+), \quad g_0 \in \mathbb{W}^{s-1/p}_p(\mathbb{R}), \quad h_0 \in \mathbb{W}^{s-1-1/p}_p(\mathbb{R}), \\ 1 < p < \infty, \qquad s > \frac{1}{p} \end{gathered} \tag{3.91}$$

და (3.90) სასაზღვრო ამოცანა განხილულ იქნება შემდეგი არაკლასიკური დასმით:

$$\begin{gathered} f_1 \in \widetilde{\mathbb{H}}^{s-2}_p(\mathbb{R}^2_+) \cap \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}_0(\mathbb{R}^2_+), \quad g_1 \in \mathbb{W}^{s-1/p}_p(\mathbb{R}^-), \quad h_1 \in \mathbb{W}^{s-1-1/p}_p(\mathbb{R}^+), \\ 1 < p < \infty, \qquad s > \frac{1}{p}. \end{gathered} \tag{3.92}$$

წინადადება 3.21. (3.88), (3.89) *სასაზღვრო ამოცანებს გააჩნიათ ერთადერთი ამონახსნი* (3.91) *დასმით და* (3.87) *სასაზღვრო ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამოხასნი ასევე.*

დამტკიცება: დებულება წარმოადგენს კარგად ცნობილ კლასიკურ შედეგს, რომელიც გვხვდება კერძოწარმოებულიან დიფერენციალური განტოლებების ბევრ სახელმძღვანელოში (იხ. მაგ., [45]). □

როგორც თეორემა 1.6-ის კერძო შემთხვევა (ადვილად მტკიცდება ლაქს-მილგრამის ლემის საშუალებით) ჩვენ გვაქვს შემდეგი

წინადადება 3.22. *შერეულ სასაზღვრო ამოცანას* (3.90) *გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი* u *კლასიკური დასმით*

$$u \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^2_+), \quad f_1 \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}_0(\mathbb{R}^2_+), \quad g_1 \in \mathbb{H}^{1/2}(\mathbb{R}^+), \quad h_1 \in \mathbb{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^-),$$

ლემა 3.23. (1.25) *სასაზღვრო ამოცანა არის ფრედჰოლმის არაკლასიკური* (1.27) *დასმით, თუ მოდელური შერეული სასაზღვრო ამოცანა* (3.90) *არის ლოკალურად ფრედჰოლმის (ე.ი არის ლოკალურად შებრუნებადი)* 0*-ში არაკლასიკური დასმით* (3.92).

დამტკიცება: ჩვენ ვიყენებთ (1.25) სასაზღვრო ამოცანისთვის კვაზი-ლოკალიზაციას (1.27) დასმით, რომელიც მოიცავს (1.26) დასმას, როგორც კერძო შემთხვევას (დეტალურად სასაზღვრო ამოცანის კვაზი-ლოკალიზაციისთვის იხ. კასტრო, 2003; დუდუჩავა, 1984 [7, 21] სტატიები და ასევე ლოკალიზაციისა და კვაზი-ლოკალიზაციის ძირითადი შედეგებისთვის - დიდენკო & ზილბერმანი, 2008; გოხბერგი & კრუპნიკი, 1979; სიმონენკო, 1965, [19, 40, 67]).

კვაზი-ლოკალიზაციის დაწყებამდე მოკლედ ავხსნათ რატომ შეიძლება შესრულდეს კვაზი-ლოკალიზაცია ბესელის პოტენციალთა (ბესოვის) სივრცეებში.

მალოკალიზებელი კლასები შედგება გლუვი ფუნქციებზე გამრავლების ოპერატორებისაგან და ვინაიდან ლოკალიზაცია სრულდება ფაქტორ-სივრცეში კომპაქტური ოპეატორების მიმართ, საკმარისია შევნიშნოთ, რომ გლუვი ფუნქციები გადაასმადია ბესელის პოტენციალებთან ფაქტორ-ალგებრაში (იხ. დუდუჩავა, 1984, [21]) და, მაშასადამე მათი ნორმები ემთხვევა $\mathbb{L}_p$-სივრცის ნორმას, ე.ი სუპრემუმ ნორმას. ეს ამარტივებს ლოკალიზაციას ანუ "კოეფიციენტების გაყინვას".

განვიხილოთ "გასწორება": ვინაიდან "უკან დაბრუნების"("pull-back") ოპერატორსა და მის ლოკალურ წარმომადგენლებს შორის სხაობა ლოკალურად კომპაქტურია $\mathbb{L}_p$-ში და შემოსაზღვრულია ბესელის პოტენციალთა $\mathbb{H}^s_p$ სივრცეებში, მაშინ ის ლოკალურად კომპაქტურია ყველა $\mathbb{H}^r_p$-სივრცეებში $r < s$-სთვის (კრასნოსელსკის თეორემა).

$\omega \in \overline{\mathcal{C}}$ წერტილში კვაზი-ლოკალიზაციით ჩვენ პირველად ვახდენთ $\mathcal{C}$ ზედაპირის ლოკალიზაციას მხები სიბრტყეზე $\mathbb{R}^2(\omega)$ (მხები ნახევარსიბრტყეზე $\mathbb{R}^2_+(\omega)$) $\omega \in \mathcal{C}$ წერტილში ($\omega \in \Gamma = \partial\mathcal{C}$,

წერტილში შესაბამისად). დიფერენციალური ოპერატორები დარჩება იგივე

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{R}^2} &:= \sum_{j=1}^{3} \mathcal{D}_j^2, \quad \mathcal{D}_j = \partial_j - \nu_j \partial_{\boldsymbol{\nu}}, \\ \partial_{\boldsymbol{\nu}} &= \sum_{j=1}^{3} \nu_j \partial_j, \quad \partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} = \sum_{j=1}^{3} \nu_{\Gamma,j} \mathcal{D}_j, \end{aligned} \tag{3.93}$$

მაგრამ $\mathbb{R}^2$ მხები სიბრტყის ნორმალური ვექტორი $\boldsymbol{\nu}(\omega)$ და მხები სიბრტყის საზღვრის $\mathbb{R}(\omega) = \partial\mathbb{R}^2_+(\omega)$ ნორმალური ვექტორი $\boldsymbol{\nu}_\Gamma(\omega)$ არიან კონსტანტები. შემდეგ ჩვენ მოვაბრუნებთ $\mathbb{R}^2(\omega)$ და $\mathbb{R}^2_+(\omega)$ მხებ სიბრტყეებს, რათა შევუთავსოთ კანონიკურ $\mathbb{R}^2$ და $\mathbb{R}^2_+$ სიბრტყეებს. ნორმალური ვექტორული ველები გადავა $\boldsymbol{\nu} = (0,0,1)$ და $\boldsymbol{\nu}_\Gamma = (0,-1,0)$-ში. მობრუნება არის სივრცეების $\mathbb{W}^r_p(\mathbb{R}^2(\omega)) \to \mathbb{W}^r_p(\mathbb{R}^2)$, $\mathbb{W}^r_p(\mathbb{R}^2_+(\omega)) \to \mathbb{W}^r_p(\mathbb{R}^2_+)$, $\widetilde{\mathbb{W}}^r_p(\mathbb{R}^2_+(\omega)) \to \widetilde{\mathbb{W}}^r_p(\mathbb{R}^2_+)$ და ა.შ. იზომორფიზმი და ოპერატორებს (3.93)-ში გადაიყვანს შემდეგ ოპერატორებში

$$\begin{gathered} \Delta_{\mathbb{R}^2(\omega)} \ \to \ \Delta := \sum_{j=1}^{2} \partial_j^2, \quad \mathcal{D}_j \ \to \ \partial_j, \quad j = 1,2, \quad , \mathcal{D}_3 \ \to \ 0, \\ \partial_{\boldsymbol{\nu}(\omega)} \ \to \ \partial_3, \quad \partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma(\omega)} \ \to \ -\partial_2 \end{gathered}$$

და (3.87), (3.88), (3.89), (3.90) მივიღებთ როგორც (1.25) სასაზღვრო ამოცანის ლოკალურ წარმომადგენლებს.

(1.25) სასაზღვრო ამოცანისათვის (1.27) არაკლაისკური დასმით მივიღებთ შემდეგ ლოკალურად კვაზი-ექვივალენტურ განტოლებებს და სასაზღვრო ამოცანებს $\omega \in \overline{\mathcal{C}}$ ზედაპირის განსხავავებულ წერტილებში:

i. (3.87) განტოლებას 0-ში, თუ $\omega \in \mathcal{C}$ არის ზედაპირის შიგა წერტილი;

ii. (3.88) დირიხლეს სასაზღვრო ამოცანას (3.91) არაკლასიკური დასმით 0-ში, თუ $\omega \in \Gamma_D$;

iii. (3.89) ნეიმანის სასაზღვრო ამოცანას (3.91) არაკლასიკური დასმით 0-ში, თუ $\omega \in \Gamma_N$;

iv. (3.90) შერეულ სასაზღვრო ამოცანას (3.92) არაკლასიკური დასმით 0-ში, თუ $\omega \in \overline{\Gamma_D} \cap \overline{\Gamma_N}$ არის სხვადასხვა სასაზღვრო პიტობების შეჯახების წერტილი.

წინამდებარე თეორემის ძირითადი დასკვნა (1.25) და (3.90) სასაზღვრო ოპერატორების ფრედჰოლმის თვისებებზე გამომდინარეობს 3.21 წინადადებიდან და კვაზი-ლოკალიზაციის შესახებ ძირითადი თეორემიდან მივიღებთ, რომ (იხ. კასტრო, 2003; დიდენკო & ზილბერმანი, 2008; დუდუჩავა, 1984; გოხბეგი & კრუპნიკი, 1979; სიმონენკო, 1965, [7, 21, 19, 40, 67]): სასაზღვრო ამოცანა (1.25), (1.27) არის ფრედჰოლმის, თუ ყველა ლოკალური (3.87), (3.88), (3.89) და (3.90) წარმომადგენელი არაკლასიკური დასმით არის ლოკალურად ფრედჰოლმის (ე.ი. არის ლოკალურად შებრუნებადი). □

ახლა ჩვენ შევიზღუდებით მოდელური შერეულ სასაზღვრო ამოცანის (3.90) განხილვით. ამისათვის გავიხსენოთ, რომ ფუნქცია

$$\mathcal{K}_\Delta(x) := \frac{1}{2\pi}\ln|x|$$

არის ორი ცვლადის ლაპლასის განტოლების ფუნდამენტური ამონხასნი

$$\begin{gathered}\Delta\mathcal{K}_\Delta(x) = \delta(x), \qquad x \in \mathbb{R}^2,\\ \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 = \partial_{\boldsymbol{\nu}}^2 + \partial_\ell^2.\end{gathered} \tag{3.94}$$

(3.94)-დან გამომდინარეობს ტოლობა

$$\delta = \Delta\mathcal{K}_\Delta = \partial_{\boldsymbol{\nu}}^2\mathcal{K}_\Delta + \partial_\ell^2\mathcal{K}_\Delta,$$

რომელსაც გამოვიყენებთ შემდეგის დასამტკიცებლად:

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}(x)}\partial_{\boldsymbol{\nu}(y)}\mathcal{K}_\Delta(x-y) = -\partial^2_{\boldsymbol{\nu}(y)}\mathcal{K}_\Delta(x-y) = -\delta(x-y) + \partial^2_{\ell(y)}\mathcal{K}_\Delta(x-y). \tag{3.95}$$

თუ $x \notin \mathbb{R}$ და $\tau \in \mathbb{R}$, მაშინ $\delta(x-\tau) = 0$ და მივიღებთ

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}(x)}\partial_{\boldsymbol{\nu}(\tau)}\mathcal{K}_\Delta(x-\tau) = -\partial^2_{\boldsymbol{\nu}(\tau)}\mathcal{K}_\Delta(x-\tau) = \partial^2_{\ell(\tau)}\mathcal{K}_\Delta(x-\tau).$$

უკანასკნელი (3.95) ტოლობის გამოყენებით და ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int_\Gamma \partial_{\ell(\tau)}\psi(\tau)\varphi(\tau)d\sigma = -\int_\Gamma \psi(\tau)\partial_{\ell(\tau)}\varphi(\tau)d\sigma,$$

სადაც ∂_ℓ არის მხები დიფერენციალური ოპერატორი Γ გლუვ კონტურზე, ჰიპერსინგულარულ ოპერატორს $\boldsymbol{V}_{\mathbb{R},+1}$ წარმოვადგენთ შემდეგნაირად

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{\mathbb{R},+1}\varphi(t) &:= \int_{\mathbb{R}} \partial_{\boldsymbol{\nu}(t)}\partial_{\boldsymbol{\nu}(\tau)}\mathcal{K}_\Delta(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau = \int_{\mathbb{R}} \partial^2_{\ell(\tau)}\mathcal{K}_\Delta(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau\\ &= -\int_{\mathbb{R}} \partial_\tau\mathcal{K}_\Delta(t-\tau)\partial_\tau\varphi(\tau)d\tau, \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned} \tag{3.96}$$

ვინაიდან $\partial_{\ell(\tau)} = \partial_\tau$ $\mathbb{R}$-ზე.

ჩვენ შეგვიძლია განვმარტოთ სტანდარტული ფენოვანი პოტენციალური ოპერატორები, ნიუტონის მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალბი შესაბამისად (იხ. (3.78))

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}_{\mathbb{R}^2_+}v(x) &:= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2_+} \ln|x-y|v(y)\,dy,\\ \boldsymbol{V}_{\mathbb{R}}v(x) &:= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \ln|x-\tau|v(\tau)d\tau,\\ \boldsymbol{W}_{\mathbb{R}}v(x) &:= -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \partial_{y_2}\ln|(x_1,x_2)-(\tau,y_2)|\Big|_{y_2=0}v(\tau)d\tau\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \partial_{y_2}\ln\sqrt{(x_1-\tau)^2+(x_2-y_2)^2}\Big|_{y_2=0}v(\tau)d\tau\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{x_2 v(\tau)d\tau}{(x_1-\tau)^2+x_2^2}, \qquad x = (x_1,x_2)^\top \in \mathbb{R}^2_+.\end{aligned} \tag{3.97}$$

ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორები $\boldsymbol{V}_{\mathbb{R},-1}$, $\boldsymbol{W}_{\mathbb{R},0}$ და $\boldsymbol{W}^*_{\mathbb{R},0}$ ასოცირებული ფენოვანი პოტენციალებით (იხ (3.83)), აკმაყოფილებენ ფორმას

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{\mathbb{R},-1}v(t) &:= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \ln|t-\tau| v(\tau)d\tau,\\ \boldsymbol{W}_{\mathbb{R},0}v(t) &:= \boldsymbol{W}^*_{\mathbb{R},0}v(t) = 0.\end{aligned} \tag{3.98}$$

(3.96) წარმოდგენის გამოყენებით ვიპოვით

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{\mathbb{R},+1}v(t) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \partial_\tau \ln|t-\tau| \partial_\tau v(\tau)d\tau\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{t-\tau}{(t-\tau)^2}\partial_\tau v(\tau)d\tau\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial_\tau v(\tau)d\tau}{t-\tau}, \quad t\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

და (3.82) პლემელის ფორმულები აკმაყოფილებენ ფორმას

$$(\boldsymbol{W}_{\mathbb{R}}v)^{\pm}(t) = \pm\frac{1}{2}v(t), \qquad -(\partial_{y_2}\boldsymbol{V}_{\mathbb{R}}v)^{\pm}(t) = \mp\frac{1}{2}v(t),$$

$$-(\partial_{y_2}\boldsymbol{W}_{\mathbb{R}}v)^{\pm}(t) = \boldsymbol{V}_{\mathbb{R},+1}v(t) \qquad (\boldsymbol{V}_{\mathbb{R}}v)^{\pm}(t) = \boldsymbol{V}_{\mathbb{R},-1}v(t) \qquad t\in\mathbb{R}.$$

ახლა დავამტკიცებთ შემდეგს.

ლემა 3.24. *ვთქვათ $1<p<\infty$, $s>\dfrac{1}{p}$. ვთქვათ $g^0_1\in\mathbb{W}^{s-1/p}_p(\mathbb{R})$ და $h^0_1\in\mathbb{W}^{s-1-1/p}_p(\mathbb{R})$ წარმოადგენენ $g_1\in\mathbb{W}^{s-1/p}_p(\mathbb{R}^-)$ და $h_1\in\mathbb{W}^{s-1-1/p}_p(\mathbb{R}^+)$ სასაზღვრო პირობების რაიმე ფიქსირებულ გაგრძელებებს (არაკლასიკური ფორმულირება (3.92)).*

(3.90) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი წარმოიდგინება ფორმულით

$$u(x) = \boldsymbol{N}_{\mathbb{R}^2_+}f(x) + \boldsymbol{W}_{\mathbb{R}}(g^0_1+\varphi^0)(x) - \boldsymbol{V}_{\mathbb{R}}(h^0_1+\psi^0)(x), \qquad x\in\mathbb{R}^2 \tag{3.99}$$

(იხ. (3.97)) და φ^0 და ψ^0 ფსევდოდიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ამონახსნები

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\varphi^0 - r_+\boldsymbol{W}_{\mathbb{R},0}\varphi^0 + r_+\boldsymbol{V}_{\mathbb{R},-1}\psi^0 = G_1, & \mathbb{R}^+ - \text{ზე}\\ \dfrac{1}{2}\psi^0 + r_-\boldsymbol{W}^*_{\mathbb{R},0}\psi^0 - r_-\boldsymbol{V}_{\mathbb{R},+1}\varphi^0 = H_1, & \mathbb{R}^- - \text{ზე},\end{cases} \tag{3.100}$$

$$\begin{aligned}&\varphi^0\in\widetilde{\mathbb{W}}^{s-1/p}_p(\mathbb{R}^+), \quad \psi^0\in\widetilde{\mathbb{W}}^{s-1-1/p}_p(\mathbb{R}^-),\\ &G_1\in\mathbb{W}^{s-1/p}_p(\mathbb{R}^+), \quad H_1\in\mathbb{W}^{s-1-1/p}_p(\mathbb{R}^-),\end{aligned} \tag{3.101}$$

სადაც

$$\begin{aligned}G_1 &:= r_+\left[(\boldsymbol{N}_{\mathbb{R}^2_+}f)^+ - \frac{1}{2}g_1 + \boldsymbol{W}_{\mathbb{R},0}g_1 - \boldsymbol{V}_{\mathbb{R},-1}h_1\right]\in\mathbb{W}^{s-1/p}_p(\mathbb{R}^+),\\ H_1 &:= r_-\left[(\partial_{\boldsymbol{\nu}_{\mathbb{R}}}\boldsymbol{N}_{\mathbb{R}^2_+}f)^+ - \frac{1}{2}h_1 + \boldsymbol{V}_{\mathbb{R},+1}g_1 - \boldsymbol{W}^*_{\mathbb{R},0}h_1\right]\in\mathbb{W}^{s-1-1/p}_p(\mathbb{R}^-).\end{aligned}$$

r_+ და r_- არიან შეზღუდვის ოპერატორები $\mathbb{R}$-დან $\mathbb{R}^+$-ში და $\mathbb{R}^-$-ში შესაბამისად.

(3.100) სასაზღვრო ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას გააჩნია ამონახსნთა ერთადერთი წყვილი φ^0 და ψ^0 კლასიკური ფორულირებით $p=2$, $s=1$.

დამტკიცება: თეორემა 1.10-ის დამტკიცების სიტყვა-სიტყვით გამეორებით და (3.99) წარმოდგენის ფორმულის საშუალებით დავამტკიცებთ (3.90) სასაზღვრო ამოცანისა და (3.100) სისტემის ექვივალენტობას (3.92) არაკლასიკური დასმით.

(3.90) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა (3.92) კლასიკური ფორმულირებით მოცემულია 3.22 წინადადებაში მაშინ, როცა (3.100) სისტემისთვის ის გამომდინარეობს (3.90) სასაზღვრო ამოცანის ექვივალენტობის დამტკიცებიდან. ☐

ლემა 3.25. *ვთქვათ,* $1 < p < \infty$, $s > \dfrac{1}{p}$.

(3.100) *სასაზღვრო ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა არის ლოკალურად შებრუნებადი* 0*-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ* (1.34) *სისტემა ლოკალურად შებრუნებადია* 0*-ში არაკლასიკური დასმით* (1.35a) *და სივრცული პარამეტრი დაკავშირებულია შემდეგნაირად:* $r = s - \dfrac{1}{p} > 0$.

დამტკიცება: (3.98) ტოლობის თანახმად $r_+\boldsymbol{W}_{\mathbb{R},0}\varphi^0 = 0$, $r_-\boldsymbol{W}^*_{\mathbb{R},0}\psi^0 = 0$ და განტოლება (3.100)-ში აკმაყოფილებენ შემდეგ ფორმას

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\varphi^0(t) + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^-} \ln|t-\tau|\psi^0(\tau)d\tau = G_1(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+, \\ \dfrac{1}{2}\psi^0(t) - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \dfrac{(\partial_\tau\varphi^0)(\tau)d\tau}{t-\tau} = H_1(t), \qquad t \in \mathbb{R}^-. \end{cases}$$

ორივე განტოლება გავამრავლოთ 2-ზე, პირველ განტოლებაში გამოვიყენოთ გაწარმოება ∂_t და შევცვალოთ $\varphi := \partial_t\varphi^0$. შემდეგ, მეორე განტოლებაში გამოვიყენოთ არეკვლა $\boldsymbol{R}_*v(t) = v(-t)$ და შევცვალოთ $\psi = \boldsymbol{R}_*\psi^0$, ასევე ინტეგრალის ქვეშ. მივიღებთ შემდეგ სისტემას

$$\begin{cases} \varphi(t) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \partial_t \ln(t+\tau)\psi(\tau)d\tau = \varphi(t) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \dfrac{\psi(\tau)d\tau}{t+\tau} = 2\partial_t G_1(t) =: G(t), \\ \psi(t) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \dfrac{\varphi(\tau)d\tau}{t+\tau} = 2H_1(-t) =: H(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

მიღებული განტოლებათა სისტემა ემთხვევა (1.34) სისტემას.

იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ (3.100) და (1.34) სისტემების ლოკალურად ექვივალენტობა 0-ში, შევნიშნოთ, რომ 2-ზე გამრავლება და არეკვლა

$$\boldsymbol{R}_* \ : \mathbb{W}^r_p(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{W}^r_p(\mathbb{R}^-), \qquad \boldsymbol{R}_* \ : \ \widetilde{\mathbb{W}}^r_p(\mathbb{R}^+) \to \widetilde{\mathbb{W}}^r_p(\mathbb{R}^-)$$

არიან შებრუნებადი ოპერატორები (შევნიშნოთ, რომ $\boldsymbol{R}_*^{-1} = \boldsymbol{R}_*$) და, მაშასადამე ლოკალურად შებრუნებადი 0-ში.

გაწარმოების ოპერატორი

$$\partial_t := \frac{d}{dt} \ : \ \mathbb{W}^r_p(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{W}^{r-1}_p(\mathbb{R}^+), \qquad \partial_t \ : \ \widetilde{\mathbb{W}}^r_p(\mathbb{R}^+) \to \widetilde{\mathbb{W}}^{r-1}_p(\mathbb{R}^+)$$

ლოკალურად შებრუნებადია შებისმიერ $x \in \mathbb{R}$ სასრულ წერტილში, რადგან ოპერატორები

$$\partial_t - iI \ : \ \mathbb{W}_p^r(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{W}_p^{r-1}(\mathbb{R}^+), \qquad \partial_t + iI \ : \ \widetilde{\mathbb{W}}_p^r(\mathbb{R}^+) \to \widetilde{\mathbb{W}}_p^{r-1}(\mathbb{R}^+)$$

არიან იზომორფიზმები (წარმოადგენენ ბესელის პოტენციალებს, იხ. თეორემა 3.26 დაბლა, დუდუჩავა, 1979, [25, ლემა 5.1] და ესკინი, 1981,[39]). მეორეს მხრივ, ჩადგმები

$$iI \ : \ \mathbb{W}_p^r(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{W}_p^{r-1}(\mathbb{R}^+), \qquad iI \ : \ \widetilde{\mathbb{W}}_p^r(\mathbb{R}^+) \to \widetilde{\mathbb{W}}_p^{r-1}(\mathbb{R}^+)$$

სობოლევის ჩადგმის თეორემის თანახმად არიან ლოკაკურად კომპაქტური და კომპაქტურ შეშფოთებას არ შეუძლია შეცვალოს ლოკალური შებრუნებადობა. □

თეორემა 1.13-ის დამტკიცება: 1.10 თეორემის თანახმად (1.30) სისტემა ფრედჰოლმისაა სობოლევ-სლობოდეცკის (1.31) სივრცეში, თუ (1.25) სასაზღვრო ამოცანა ფრედჰოლმისაა (1.27) არაკლასიკური დასმით. სხვა სიტყვებით, 3.23 ლემის თანახმად (1.25) სასაზღვრო ამოცანა ფრედჰოლმისაა (1.27) არაკლასიკური დასმით, თუ (3.90) სასაზღვრო ამოცანა ლოკალურად შებრუნებადია 0-ში (3.92) არაკლასიკური დასმით. და, საბოლოოდ, 3.24 ლემის და 3.25 ლემის თანახმად (3.90) სასაზღვრო ამოცანა ლოკალურად შებრუნებადია (3.92) არაკლასიკური დასმით, თუ (1.34) სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემა ლოკალურად შებრუნებადია 0-ში სობოლევ-სლობოდეცკის (1.35a) სივრცეში. ეს ასრულებს დებულების პირველი ნაწილის დასრულებას, რომლითაც ვუმკლავდებით ამოხსნადობას სობოლევ-სლობოდეცკის (1.31) და (1.35a) სივრცეებში.

დებულების მეორე ნაწილი, სადაც მოცემულია ამოხსნადობა ბესელის პოტენციალთა (1.32) და (1.35b) სივრცეებში, გამომდინარეობს ქვემოთ მოცემული 3.39 წინადადების პირველი ნაწილიდან და დამტკიცებულია დუდუჩავა, 2015 და დიდენკო & დუდუჩავას, 2016, [30, 18] სტატიებში, სადაც მოცემულია რომ ამოხსნადობის ეს თვისებები ექვივალენტურია. □

3.4. ფურიეს კონვოლუციის ოპერატორები ბესელის პოტენციალთა სივრცეებში

შემდეგი თეორემის ჩამოსაყალიბებლად დაგვჭირდება ფურიეს კონვოლუციისა და ბესელის პოტენციალთა ოპერატორების შემოღება.

სკალარული სივრცეებისთვის გამოვიყენებთ ვექტორული და მატრიცული ფუნქციების ერთნაირ აღნიშვნას, თუკი ეს არ გამოიწვევს დაბნეულობას. მაგალითად, $\mathbb{L}_{\infty,loc}(\mathbb{R})$ შეიძლება იყოს ლოკალურად შემოსაზღვრული როგორც სკალარული, ასევე ვექტორული და მატრიცული მნიშვნელობის ფუნქციების სივრცე, რომელიც ნათლად გამოჩნდება კონტექსტიდან.

ვთქვათ $a \in \mathbb{L}_{\infty,loc}(\mathbb{R})$ არის ლოკალურად შემოსაზღვრული $m \times m$-ზე მატრიც ფუნქცია. ფურიეს კონვოლუციის ოპერატორი (ფკო) a-სიმბოლოთი განიმარტება შემდეგნაირად

$$W_a^0 := \mathcal{F}^{-1} a \mathcal{F}.$$

აქ

$$\mathcal{F}u(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} u(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

წარმოადგენს ფურიეს გარდაქმნას და

$$\mathcal{F}^{-1}v(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} v(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

არის მისი შებრუნებული გარდაქმნა. თუ ოპერატორი

$$W_a^0 : \mathbb{H}_p^s(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{H}_p^{s-r}(\mathbb{R})$$

შემოსაზღვრულია, ვიტყვით, რომ a არის r რიგის $\mathbb{L}_p$-მულტიპლიკატორი და გამოვიყენებთ "$\mathbb{L}_p$-მულტიპლიკატორი"თუ რიგი არის 0. ყველა r რიგის (0 რიგის) $\mathbb{L}_p$-მულტიპლიკატორთა სიმრავლე აღინიშნება $\mathfrak{M}_p^r(\mathbb{R})$-ით ($\mathfrak{M}_p(\mathbb{R} -)$, შესაბამისად). ვთქვათ

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_p^r(\mathbb{R}) := \bigcap_{p-\varepsilon<q<p+\varepsilon} \mathfrak{M}_q^r(\mathbb{R}), \qquad \widetilde{\mathfrak{M}}_p(\mathbb{R}) := \bigcap_{p-\varepsilon<q<p+\varepsilon} \mathfrak{M}_q(\mathbb{R}).$$

შევნიშნოთ, რომ $\widetilde{\mathfrak{M}}_p^r(\mathbb{R})$ და $\widetilde{\mathfrak{M}}_p(\mathbb{R})$ არიან ε-ზე დამოუკიდებლები, რადგან ინტერპოლაციის თეორემის თანახმად $\mathfrak{M}_{p_-}^r(\mathbb{R}) \bigcap \mathfrak{M}_{p_+}^r(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{M}_{p_0}^r(\mathbb{R})$ for all $1 < p_- < p_0 < p_+ < \infty$.

r რიგის $a \in \mathfrak{M}_p^r(\mathbb{R})$ მულტიპლიკატორისთვის, ფურიეს კონვოლუციის ოპერატორი $\mathbb{R}^+$ ნახევარ ღერძზე განიმარტება ტოლობით

$$W_a = r_+ W_a^0 \ : \ \widetilde{\mathbb{H}}_p^s(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{H}_p^{s-r}(\mathbb{R}^+) \tag{3.102}$$

სადაც $r_+ := r_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{H}_p^s(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{H}_p^s(\mathbb{R}^+)$ არის შეზღუდვის ოპერატორი ნახევარ ღერძზე $\mathbb{R}^+$.

$s \in \mathbb{R}$ პარამეტრი არ ჩნდება $\mathfrak{M}_p^r(\mathbb{R})$ მულტიპლიკატორთა კლასის განმარტებაში ვინაიდან $\mathfrak{M}_p^r(\mathbb{R})$ დამოუკიდებელია s-ზე: თუ (3.102)-ში W_a ოპერატორი შემოსაზღვრულია ზოგიერთი

$s \in \mathbb{R}$-სთვის, მაშინ ის შემოსაზღვრულია s-ის ყველა მნიშვნელობისთვის. $\mathfrak{M}_p^r(\mathbb{R})$ მულტიპლიკატორთა კლასის ალტერნატიული განსაზღვრება წარმოადგენს შემდგომს: $a \in \mathfrak{M}_p^r(\mathbb{R})$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $\lambda^{-r} a \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}) = \mathfrak{M}_p^0(\mathbb{R})$, სადაც $\lambda^r(\xi) := (1+|\xi|^2)^{r/2}$. ეს დებულება არის დაბლა მოცემული 3.26 თეორემის ერთერთი შედეგი.

განვიხილოთ ბესელის პოტენციალთა ოპერატორები

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Lambda}^r_\gamma = W^0_{\lambda^r_\gamma} \ : \ \widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathbb{R}^+) \to \widetilde{\mathbb{H}}^{s-r}_p(\mathbb{R}^+), \\ &\mathbf{\Lambda}^r_{-\gamma} = r_+ W^0_{\lambda^r_{-\gamma}} \ell \ : \ \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{H}^{s-r}_p(\mathbb{R}^+), \\ &\lambda^r_{\pm\gamma}(\xi) := (\xi \pm \gamma)^r, \qquad \xi \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{Im}\gamma > 0 \end{aligned} \tag{3.103}$$

არაუარყოფითი $s \geqslant 0$-სთვის. აქ $\ell \ : \ \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R})$ არის გაგრძელების ოპერატორი. (3.102)-ში არ გვჭირდება გაგრძელების ოპერატორი, ვინაიდან $\widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathbb{R}^+)$ სივრცე ავტომატურად ჩადგმულია $\mathbb{H}^s_p(\mathbb{R})$ სივრცეში 0-ით გაგრძელებული ფუნქციიით.

უარყოფითი $s < 0$-სთვის ბესელის პოტენციალთა ოპერატორები $\mathbf{\Lambda}^r_{\pm\gamma}$ განიმარტება დუალურ სივრცეებს შორის.

თეორემა 3.26. *ვთქვათ $1 < p < \infty$. მაშინ:*

1. *ყოველი $r, s \in \mathbb{R}$-სთვის, $\gamma \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\gamma > 0$ (3.103) ბესელის პოტენციალთა ოპერატორები წარმოშობენ იზომორფიზმს შესაბამის სივრცეებში (იხ. დუდუჩავა, 1979; ესკინი, 1981; [25, 39]) და არ არიან დამოკიდებულნი $\ell : \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R})$ გაგრძელების ოპერატორების არჩევაზე.*

2. *ნებისმიერი r რიგის ოპერატორისთვის $\mathbf{A} : \widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{H}^{s-r}_p(\mathbb{R}^+)$, შემდეგი დიაგრამა კომუტატიურია*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathbb{R}^+) & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbb{H}^{s-r}_p(\mathbb{R}^+) \\ \uparrow \mathbf{\Lambda}^{-s}_\gamma & & \downarrow \mathbf{\Lambda}^{s-r}_{-\gamma} \\ \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+) & \xrightarrow{\mathbf{\Lambda}^{s-r}_{-\gamma}\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}^{-s}_\gamma} & \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+). \end{array} \tag{3.104}$$

   (3.104) დიაგრამა უზრუნველყოფს r რიგის $\mathbf{A}$ ოპერატორების ექვივალენტურ დაყვანას 0 რიგის $\mathbf{\Lambda}^{s-r}_{-\gamma}\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}^{-s}_\gamma : \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+)$ ოპერატორებზე.

3. *ნებისმიერი r-რიგის შემოსაზღვრული კონვოლუციის $W_a : \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{H}^{s-r}_p(\mathbb{R}^+)$ ოპერატორისთვის და ნებისმიერი კომპლექსურ რიცხვთა წყვილისთვის γ_1, γ_2 რომლისთვისაც $\operatorname{Im}\gamma_j > 0$, $j = 1, 2$, დაყვანილი ოპერატორი*

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Lambda}^\mu_{-\gamma_1} W_a \mathbf{\Lambda}^\nu_{\gamma_2} = W_{a_{\mu,\nu}} \ : \ \mathbb{H}^{s+\nu}_p(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{H}^{s-r-\mu}_p(\mathbb{R}^+), \\ &a_{\mu,\nu}(\xi) := (\xi - \gamma_1)^\mu a(\xi)(\xi + \gamma_2)^\nu \end{aligned} \tag{3.105}$$

კვლავ წარმოადგენს ფურიეს კონვოლუციას.

კერძოდ, დაყვანის ოპერატორს $\mathbf{\Lambda}^{s-r}_{-\gamma} W_a \mathbf{\Lambda}^{-s}_{\gamma} : \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+)$ *აქვს სიმბოლო*

$$a_{s-r,-s}(\xi) = \lambda^{s-r}_{-\gamma}(\xi) a(\xi) \lambda^{-s}_{\gamma}(\xi) = \Big(\frac{\xi-\gamma}{\xi+\gamma}\Big)^{s-r} \frac{a(\xi)}{(\xi+\gamma)^r}\,.$$

შენიშვნა 3.27. *მულტიპლიკატორების ნებისმიერი წყვილისთვის* $a \in \mathfrak{M}^r_p(\mathbb{R})$, $b \in \mathfrak{M}^s_p(\mathbb{R})$ *შესაბამისი კოვოლუციის* W^0_a *და* W^0_b *ოპერატორებს მთელ ღერძზე გააჩნიათ შემდეგი თვისება* $W^0_a W^0_b = W^0_b W^0_a = W^0_{ab}$.

შესაბამისი ვინერ-ჰოფის ოპერატორებისათვის ნახევარღერძზე სრულდება მსგავსი ტოლობა

$$W_a W_b = W_{ab} \tag{3.106}$$

სრულდება ერთერთი შემდეგიდან: $a(\xi)$ *ფუნქციას აქვს ანალიზური გაგრძელება ქვედა ნახევარსიბრტყეზე ან* $b(\xi)$ *ფუნქციას აქვს ანალიზური გაგრძელება ზედა ნახევარსიბრტყეზე (იხ. დუდუჩავა, 1979, [25]).*

შევნიშნოთ, რომ ფაქტიურად (3.105) *წარმოადგენს* (3.106)*-ის შედეგს.*

ვთქვათ, $\dot{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ აღნიშნავს $\mathbb{R}$ ნამდვილი ღერძის ერთწერტილიან კომპაქტიფიკაციას $\mathbb{R}$ ნამდვილი ღერძის და $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ აღნიშნავს $\mathbb{R}$-ის ორწერტილიან კომპაქტიფიკაციას. $C(\dot{\mathbb{R}})$-თი ($C(\overline{\mathbb{R}})$-თი შესაბამისად) ჩვენ აღვნიშნავთ $\mathbb{R}$-ზე უწყვეტი $g(x)$ ფუნქციების სივრცეს, რომელთაც გააჩნიათ ერთნაირი ზღვარი უსასრულობაში $g(-\infty) = g(+\infty)$ (ზღვარი უსასრულობაში შესაძლოა განსხვავდებოდეს $g(-\infty) \neq g(+\infty)$). $PC(\dot{\mathbb{R}})$-ით აღნიშნულია უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციების სივრცე $\dot{\mathbb{R}}$-ზე, რომელთაც გააჩნიათ ზღვარი $a(t \pm 0)$ ყველა $t \in \dot{\mathbb{R}}$ წერტილში, უსასრულობის ჩათვლით.

წინადადება 3.28 (ლემა 7.1, დუდუჩავა, 1979, [25] და წინადადება 1.2, დუდუჩავა, 1987, [28])**.** *ვთქვათ* $1 < p < \infty$, $a \in C(\dot{\mathbb{R}}^+)$, $b \in C(\dot{\mathbb{R}}) \cap \widetilde{\mathfrak{M}}_p(\dot{\mathbb{R}})$ *და* $a(\infty) = b(\infty) = 0$. *მაშინ* $aW_b, W_b\, aI : \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+)$ *ოპერატორები არიან კომპაქტური.*

უფრო მეტიც, ეს ოპერატორები არიან კომპაქტური ყველა ბესელის პოტენციალთა და ბესოვის სივრცეებში, სადაც ისინი არიან შემოსაზღვრულნი კრასნოსელსკის კომპაქტური ოპერატორებისათვის ინტერპოლაციის შესახებ თეორემის თანახმად.

წინადადება 3.29 (ლემა 7.4, დუდუჩავა, 1979, [25] და ლემა 1.2, დუდუჩავა, 1987, [28])**.** *ვთქვათ* $1 < p < \infty$ *და* a *და* b *აკმაყოფილებენ სულ მცირე ერთ პირობას შემდეგიდან:*

(i) $a \in C(\overline{\mathbb{R}}^+)$, $b \in \widetilde{\mathfrak{M}}_p(\mathbb{R}) \cap PC(\overline{\mathbb{R}})$,

(ii) $a \in PC(\overline{\mathbb{R}}^+)$, $b \in C\widetilde{\mathfrak{M}}_p(\overline{\mathbb{R}})$.

მაშინ $[aI, W_b]$ *კომუტანტები არიან კომპაქტური ოპერატორები* $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+)$ *სივრცეში და ასევე, ყველა ბესელის პოტენციალთა და ბესოვის სივრცეებში, სადაც ისინი არიან შემოსაზღვრულნი კრასნოსელსკის კომპაქტური ოპერატორებისათვის ინტერპოლაციის შესახებ თეორემის თანახმად.*

შედეგი 3.30. *მულტიპლიკატორების კლასი ბესელის პოტენციალთა სივრცეში* $\mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^n)$ *დამოუკიდებულია პარამეტრზე* $s \in \mathbb{R}$ *და ემთხვევა მულტიპლიკატორების კლასს ლებეგის სივრცეში* $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$*:*

$$\mathfrak{M}(\mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^n)) = \mathfrak{M}(\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)) = \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n) \qquad \forall\, s \in \mathbb{R}, \quad 1 < p < \infty\,. \tag{3.107}$$

შედეგი 3.31. *თუ* $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ *და* $s_1 \geq s_2$*. მაშინ ჩადგმა*

$$\mathbb{H}^{s_1}_p(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{H}^{s_2}_p(\mathbb{R}^n) \tag{3.108}$$

უწყვეტია.

3.5. მელინის კონვოლუციის ოპერატორები $\mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^+)$ სივრცეში

ამ თავში ჩვენ მოვიყვანთ დამატებით შედეგებს სტატიიდან დიდენკო & დუდუჩავა, 2016, [18] (ასევე იხ. დუდუჩავა, 1979, 1987, 2015,[25, 28, 30]), რომლების სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების გამოკვევისათვის წარმოადგენენ აუცილებლობას.

ვთქვათ $a(\xi)$ არის $\mathbb{R}$ ნამდვილ ღერძზე უწყვეტი $m\times m$-ზე მარტიც-ფუნქცია $a\in C\mathfrak{M}^0_p(\mathbb{R})$, რომელსაც შესაძლოა გააჩნდეს წყვეტა უსასრულობაში. განვიხილოთ $\mathfrak{M}^0_a$ მელინის კონვოლუციის ოპერატორი a-სიმბოლოთი ბესელის პოტენციალთა სივრცეში

$$\mathfrak{M}^0_a := \mathcal{M}^{-1}_\beta a\mathcal{M}_\beta \;:\; \widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^+), \quad s\in\mathbb{R},$$

სადაც

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\beta v(\xi) &:= \int_0^\infty \tau^{\beta-i\xi} v(\tau)\frac{d\tau}{\tau}, \quad \xi\in\mathbb{R},\\ \mathcal{M}^{-1}_\beta u(t) &:= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty t^{i\xi-\beta}u(\xi)d\xi, \qquad t\in\mathbb{R}^+,\end{aligned}$$

წარმოადგენენ მელინის გარდაქმნას და მის შებრუნებულს.

მელინის კონვოლუციის ოპერატორის მნიშვნელოვან მაგალითს წარმოადგენს შემდეგი ფორმის ინტეგრალური ოპერატორი

$$\mathfrak{M}^0_a\mathbf{u}(t) := a_0\mathbf{u}(t) + \frac{a_1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\mathbf{u}(\tau)\,d\tau}{\tau-t} + \int_0^\infty \mathcal{K}\left(\frac{t}{\tau}\right)\mathbf{u}(\tau)\frac{d\tau}{\tau} \tag{3.109}$$

$m\times m$-ზე მატრიცის კოეფიციენტებით და $m\times m$-ზე მატრიცის გულით

$$\int_0^\infty t^{\beta-1}|\mathcal{K}(t)|dt<\infty, \quad 0<\beta<1.$$

მაშინ $\mathfrak{M}^0_a$ არის შემოსაზღვრული ოპერატორი ლებეგის სივრცეში

$$\mathfrak{M}^0_a \;:\; \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+), \quad \beta := \frac{1}{p}, \quad 1<p<\infty. \tag{3.110}$$

(შეადარეთ [25]). (3.109) ოპერატორის სიმბოლო არის გულის მელინის გარდაქმნა

$$\begin{aligned}a_\beta(\xi) &:= a_0 + a_1\coth\pi\,(i\beta+\xi) + \mathcal{M}_\beta\mathcal{K}(\xi)\\ &:= a_0 + a_1\coth\pi\,(i\beta+\xi) + \int_0^\infty t^{\beta-i\xi}\mathcal{K}(t)\frac{dt}{t}, \quad \xi\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

აშკარად, $\mathfrak{M}^0_a\mathfrak{M}^0_b\varphi = \mathfrak{M}^0_{ab}\varphi$ $\varphi\in C^\infty_0(\mathbb{R}^+)$-სთვის.

თეორემა 3.32. *ვთქვათ* $1<p<\infty$ *(ან* $p=1,\infty$*, მაგრამ, მაშინ* $a_1=0$ (3.109)-*ში). შემდეგი სამი თვისება ექვივალენტურია:*

i. $\mathfrak{M}^0_a$ *ოპერატორი* (3.109)–(3.110)-*ში ფრედჰოლმისაა;*

ii. ოპერატორის სიმბოლო შებრუნებადია (ელიფსურია)

$$\inf_{\xi\in\mathbb{R}} |\det a_\beta(\xi)| > 0;$$

iii. ოპერატორი შებრუნებადია და შებრუნებული ოპერატორია $\mathfrak{M}^0_{a^{-1}}$.

წინადადება 3.33 (ლემა 7.4, დუდუჩავა, 1979, [25] და ლემა 1.2, დუდუჩავა, 1987, [28])**.** *ვთქვათ* $1 < p < \infty$ *და* a *და* b *სულ მცირე ერთერთს შემდეგი პირობებიდან:*

(i) $a \in C(\overline{\mathbb{R}}^+)$, $b \in \widetilde{\mathfrak{M}}_p(\mathbb{R}) \cap PC(\overline{\mathbb{R}})$,

(ii) $a \in PC(\overline{\mathbb{R}}^+)$, $b \in C\widetilde{\mathfrak{M}}_p(\overline{\mathbb{R}})$.

მაშინ $[aI, \mathfrak{M}^0_b]$ *კომუტანტები არიან კომპაქტური ოპერატორები* $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+)$ *სივრცეში და ასევე, ყველა ბესელის პოტენციალთა და ბესოვის სივრცეებში, სადაც ისინი არიან შემოსაზღვრულნი კრასნოსელსკის კომპაქტური ოპერატორებისათვის ინტერპოლაციის შესახებ თეორემის თანახმად.*

ლებეგის სივრცეებთან შედარებით სავსებით განსხვავებული მდგომარეობაა ბესელის პოტენციალთა სივრცეებში. მოვიყვანოთ ზოგიერთი შედეგი დიდენკო & დუდუჩავა, 2016, [18] და დუდუჩავა, 2005, [30, § 2] სტატიებიდან. განვიხილოთ $\mathbb{C}$ კომპლექსურ სივრცეში უსასრულობაში ქრობადი მერომორფული ფუნქციები

$$\mathcal{K}(t) := \sum_{j=0}^{N} \frac{d_j}{(t-c_j)^{m_j}} \tag{3.111}$$

პოლუსებით $c_0, c_1, \ldots \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, კომპლექსური კოეფიციენტებით $d_j \in \mathbb{C}$ and $m_j \in \mathbb{N}$.

განსაზღვრება 3.34 (იხილეთ დუდუჩავა, 2015, [30])**.** (3.111)*-ში ჩვენ ვუწოდებთ* $\mathcal{K}(t)$ *გულს დასაშვებს, თუ* $c_0, \ldots, c_\ell$ *პოლუსებისთვის, რომლებიც ეკუთვნიან დადებით ნახევარღერძს* $\arg c_0 = \cdots = \arg c_\ell = 0$*, შესაბამისი ჯერადობა არიან ერთი, ე.ი.,* $m_0 = \cdots = m_\ell = 1$.

მაგალითად: მელინის კონვოლუციის ოპერატორს

$$\boldsymbol{K}^m_c v(t) := \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\tau^{m-1} v(\tau)d\tau}{(t-c\tau)^m}, \qquad 0 < \arg c < 2\pi, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad v \in \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+)$$

აქვს დასაშვებული გული ნებისმიერი $m = 1, 2, \ldots$-თვის თუ c არ არის ნამდვილი. თუ c ნამდვილია, მაშინ $m = 1$.

წინადადება 3.35 (იხ. დუდუჩავა, 2015,[30], შედეგი 2.3, თეორემა 2.4)**.** *ვთქვათ* $1 < p < \infty$ *(ან* $p = 1, \infty$*, მაგრამ მაშინ* $a_1 = 0$ (3.109)*-ში) და* (3.111)*-ში* $\mathcal{K}(t)$ *არის დასაშვები გული. მაშინ მელინის კონვოლუცია*

$$\mathfrak{M}^0_{a_\beta}\mathbf{u}(t) := a_0\mathbf{u}(t) + \int_0^\infty \mathcal{K}\left(\frac{t}{\tau}\right)\mathbf{u}(\tau)\frac{d\tau}{\tau}$$

შემოსაზღვრული ოპერატორია $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+)$ *ლებეგის სივრცეში, და აგრეთვე ბესელის პოტენციალთა* $\mathfrak{M}^0_{a_\beta} : \widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^+)$ *და სობოლევ-სლობოდეცკის* $\mathfrak{M}^0_{a_\beta} : \widetilde{\mathbb{W}}^s_p(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{W}^s_p(\mathbb{R}^+)$ *სივრცეებში ყველა* $s \in \mathbb{R}$*-სთვის.*

შემდეგი თეორემა უზრუნველყოფს მელინის კონვოლუციის ოპერატორის დაყვანას ბესელის პოტენციალთა სივრცეების წყვილიდან ლებეგის სივრცეებში.

თეორემა 3.36 (დიდენკო & დუდუჩავა, 2016, [18], თეორემა 4.1)**.** *ვთქვათ* $0 < \arg c < 2\pi$, $0 < \arg\gamma < \pi$ *და* $r, s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$. *მაშინ* $K^1_c : \widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^+)$ *ოპერატორი არის შემდეგი ოპერატორის დაყვანილი ექვივალენტურად*

$$\boldsymbol{A}^{1,s}_c := \boldsymbol{\Lambda}^s_{-\gamma}\boldsymbol{K}^1_c\boldsymbol{\Lambda}^{-s}_{\gamma} : \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+)$$

და უფრო მეტიც

$$\boldsymbol{A}^{1,s}_c = c^{-s}\boldsymbol{K}^1_c W_{g^s_{-c\gamma,\gamma}}, \qquad c^{-s} := |c|^{-s}e^{-\arg c\, si}$$

თუ მხოლოდ $0 < \arg(-c\gamma) < \pi$.

თუ $0 < \arg(c\gamma) < \pi$, *ავირჩიოთ ნებისმიერი* $\gamma_0 \in \mathbb{C}$ *ისეთი, რომ* $0 < \arg\gamma_0 < \pi$ *და* $0 < \arg(-c\gamma_0) < \pi$ *(* γ_0*-ს ასეთი არჩევა შესაძლებელია, ვინაიდან* c *არ არის ნამვილი კონსტანტა* $\arg c \neq 0$*). მაშინ*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}^{1,s}_c = c^{-s}W_{g^s_{-\gamma,-\gamma_0}}.\boldsymbol{K}^1_c W_{g^s_{-c\gamma_0,\gamma}} = \mathbf{K}^1_c W_{g^s_{-\gamma,-\gamma_0}g^s_{-c\gamma_0,\gamma}} + \mathbf{T},\\ &g^s_{-c\gamma_0,\gamma}(\xi) := \left(\frac{\xi - c\gamma_0}{\xi+\gamma}\right)^s, \quad g^s_{-\gamma,-\gamma_0}(\xi) := \left(\frac{\xi-\gamma}{\xi-\gamma_0}\right)^s, \end{aligned} \tag{3.112}$$

სადაც $\mathbf{T} : \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+)$ *არის კომპაქტური ოპერატორი.*

შევნიშნოთ, რომ $g^s_{-c\gamma,\gamma}(\xi) := \left(\dfrac{\xi - c\gamma}{\xi+\gamma}\right)^s$ ფუნქცია და (3.112)-ში მონაწილე ორივე ფუნქცია არიან უწყვეტნი უსასრულობაში:

$$g^s_{-c\gamma,\gamma}(\pm\infty) = g^s_{-c\gamma_0,\gamma}(\pm\infty) = g^s_{-\gamma,-\gamma_0}(\pm\infty) = 1.$$

3.6. დაყვანილი მელინის კონვოლუციის ოპერატორის გამოკვლევა

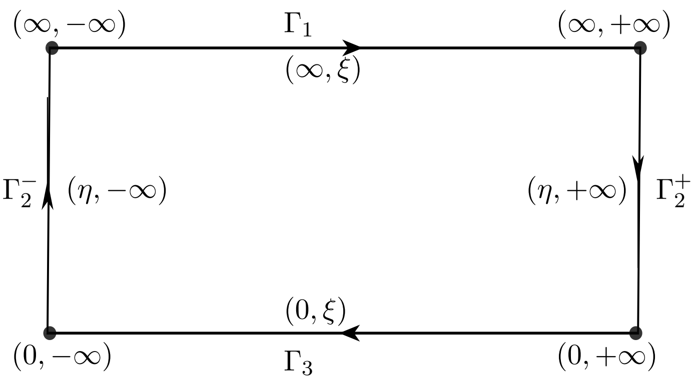
წინა ორი პარაგრაფის შედეგები ბანახის ალგებრისათვის შედეგებთან ერთად, რომელიც წარმოქმნილია მელინის და ფურიეს კონვოლუციის ოპერატორებით (იხ. დუდუჩავა, 1987, [28]) გვაძლევს საშუალებას გამოვიკვლიოთ დაყვანილი მელინის კონვოლუციის ოპერატორი. ამისათვის გვჭირდება ჩავწეროთ მოდელური ოპერატორის სიმბოლო

$$\mathbf{A} := d_0 I + \sum_{j=1}^{n} d_j \mathbf{K}^1_{c_j} \ : \ \widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^+), \tag{3.114}$$

სადაც $\mathbf{K}^1_{c_1}, \ldots, \mathbf{K}^1_{c_n}$ არიან დასაშვები მელინის კონვოლუციის ოპერატორები.

(3.114) ოპერატორის სიმბოლოს დასადგენად განვიხილოთ საათის ისრის მიმართულებით ორიენტირებული უსასრულო "მართკუთხედი"$\mathfrak{R} := \Gamma_1 \cup \Gamma_2^- \cup \Gamma_2^+ \cup \Gamma_3$, სადაც (შეადარე. ნახ. 3)

$$\Gamma_1 := \{+\infty\} \times \overline{\mathbb{R}}, \ \ \Gamma_2^{\pm} := \overline{\mathbb{R}}^+ \times \{\pm\infty\}, \ \ \Gamma_3 := \{0\} \times \overline{\mathbb{R}}.$$



ნახ. 3. $\mathcal{A}^s_p(\omega)$ სიმბოლოს განსაზღვრის არე $\mathfrak{R}$.

დიდენკო & დუდუჩავა, 2016, სტატიაში [**?**, **?**, ფორმულები (52)-(53d)] DD16 მოცემული ფორმულების თანახმად $\mathbf{A}$ ოპერატორის სიმბოლო $\mathcal{A}^s_p(\omega)$ არის

$$\mathcal{A}^s_p(\omega) := d_0 \mathcal{I}^s_p(\omega) + \sum_{j=1}^{n} d_j \mathcal{K}^{1,s}_{c_j,p}(\omega), \tag{3.115}$$

სადაც

$$\mathcal{I}^s_p(\omega) := \begin{cases} g^s_{-\gamma,\gamma,p}(\infty,\xi), & \omega = (\infty,\xi) \in \overline{\Gamma}_1, \\ \left(\dfrac{\pm\eta - \gamma}{\pm\eta + \gamma}\right)^s, & \omega = (\eta, \pm\infty) \in \Gamma_2^{\pm}, \\ e^{\pi s i}, & \omega = (0,\xi) \in \overline{\Gamma}_3, \qquad \xi, \eta \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.116a}$$

$$g^s_{-\gamma,\gamma,p}(\infty,\xi) := \frac{e^{2\pi s i} + 1}{2} + \frac{e^{2\pi s i} - 1}{2i} \cot \pi\Big(\frac{1}{p} - i\xi\Big) = e^{\pi s i} \frac{\sin \pi\Big(\frac{1}{p} + s - i\xi\Big)}{\sin \pi\Big(\frac{1}{p} - i\xi\Big)}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

$$\mathcal{K}^{1,s}_{c,p}(\omega) := \begin{cases} \dfrac{e^{-i\pi(\frac{1}{p}-i\xi-1)}c^{\frac{1}{p}-i\xi-s-1}}{\sin\pi(\frac{1}{p}-i\xi)}, & \omega=(\infty,\xi)\in\overline{\Gamma}_1, \\ 0, & \omega=(\eta,\pm\infty)\in\Gamma_2^{\pm}, \\ \dfrac{e^{-i\pi(\frac{1}{p}-i\xi-1)}c^{\frac{1}{p}-i\xi-s-1}}{\sin\pi(\frac{1}{p}-i\xi)}, & \omega=(0,\xi)\in\overline{\Gamma}_3, \end{cases} \tag{3.116b}$$

$$0<\arg c<2\pi, \quad -\pi<\arg(c\gamma)<0, \quad 0<\arg\gamma<\pi$$

და $c^\delta = |c|^\delta e^{i\delta\arg c}$, $\delta\in\mathbb{R}$.

შევნიშნოთ, რომ მელინის კონვოლუციის ოპერატორს $\mathbf{K}^1_{-1}$,

$$\mathbf{K}^1_{-1}\varphi(t)=\mathbf{K}^1_{e^{i\pi}}\varphi(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{t+\tau}=\mathfrak{M}^0_{k_p}\varphi(t), \qquad k_p(\xi)=\frac{1}{\sin\pi\left(\frac{1}{p}-i\xi\right)},$$

რომელიც ჩვენ გვხვდება გამოყენებებში (იხ. (1.34) და ლემა 3.24), აქვს გაცილებით მარტივი სიმბოლო ბესელის პოტენციალთა სივრცეში $\mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^+)$ (იხ. (3.116b)):

$$\mathcal{K}^{1,s}_{-1,p}(\omega) := \begin{cases} \dfrac{e^{-\pi si}}{\sin\pi(\frac{1}{p}-i\xi)}, & \omega=(\infty,\xi)\in\overline{\Gamma}_1, \\ 0, & \omega=(\eta,\pm\infty))\in\Gamma_2^{\pm}, \\ \dfrac{e^{-\pi si}}{\sin\pi(\frac{1}{p}-i\xi)}, & \omega=(0,\xi)\in\overline{\Gamma}_3. \end{cases} \tag{3.117}$$

ფუნქცია $\det\mathcal{A}^s_p(\omega)$ უწყვეტია $\mathfrak{R}$ მართკუთხედზე. ჩამოყალიბებული დებულება ადვილად მოწმდება (3.115), (3.116a)-(3.116b)-ში წარმოდგენილი სიმბოლოს ანალიზით და თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\mathcal{I}^s_p(-\infty,-\infty)=1, \quad \mathcal{I}^s_p(0,-\infty)=\mathcal{I}^s_p(0,+\infty)=e^{\pi si}, \quad \mathcal{I}^s_p(+\infty,+\infty)=e^{2\pi si},$$

$$\mathcal{K}^{1,s}_{-1,p}(-\infty,-\infty)=\mathcal{K}^{1,s}_{-1,p}(0,-\infty)=\mathcal{K}^{1,s}_{-1,p}(0,+\infty)=\mathcal{K}^{1,s}_{-1,p}(+\infty,+\infty)=0,$$

$$g^s_{-\gamma,\gamma,p}(\infty,-\infty)=1, \qquad g^s_{-\gamma,\gamma,p}(\infty,+\infty)=e^{2\pi si}.$$

ამიტომ, $\det\mathcal{A}^s_p(\omega)$ ფუნქციის ანასახი არის ჩაკეტილი წირი კომპლექსურ სიბრტყეში და თუ სიმბოლო ელიფსურია

$$\inf_{\omega\in\mathfrak{R}}\left|\det\mathcal{A}^s_p(\omega)\right|>0,$$

$(1/2\pi)\arg\mathcal{A}^s_p(\omega)$ არგუმენტის ნაზრდი, როდესაც ω გაირბენს $\mathfrak{R}$ მართკუთხედს ორიენტაციის მიმართულებით, წარმოადგენს მთელ რიცხვს. მას უწოდებენ ბრუნვათა რიცხვს ან წირის ინდექსს $\Gamma:=\{z\in\mathbb{C}: z=\det\mathcal{A}_p(\omega),\ \omega\in\mathfrak{R}\}$ და აღინიშნება $\operatorname{ind}\det\mathcal{A}^s_p$.

ქვემოთ მოცემული 3.37-3.39 წინადადებები კარგად ცნობილია და შემდეგ პარაგრაფში გამოიყენება ძირითადი თეორემების დასამტკიცებლად.

წინადადება 3.37 (იხ. დუდუჩავა, 2015, [30] და თეორემა 5.4, დიდენკო & დუდუჩავა, 2016, [18]). *ვთქვათ* $1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$. *ოპერატორი*

$$\mathbf{A} : \widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^+) \tag{3.118}$$

განსაზღვრული (3.114) *ტოლობაში ფრედჰოლმისაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მისი სიმბოლო* $\mathcal{A}^s_p(\omega)$ *განმარტებული* (3.115), (3.116a)– (3.116b) *ტოლობებში, ელიფსურია. თუ* $\mathbf{A}$ *ფრედჰოლმისაა, მაშინ*

$$\mathrm{Ind}\mathbf{A} = -\mathrm{ind}\det\mathcal{A}^s_p.$$

(3.118)-*ში მოცემული* $\mathbf{A}$ *ოპერატორი ლოკალურად შებრუნებადია* 0-*ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მისი სიმბოლო* $\mathcal{A}^s_p(\omega)$ *ელიფსურია მხოლოდ* Γ_1 *სიმრავლეზე*

$$\inf_{\omega\in\Gamma_1}\left|\det\mathcal{A}^s_p(\omega)\right| > 0.$$

წინადადება 3.38 (იხ. დუდუჩავა, 2015, [30], შედეგი 6.3). *ვთქვათ* $1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$ *და ვთქვათ* $\mathbf{A}$ *განმარტებულია* (3.114)-*ით. თუ* $\mathbf{A} : \widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^+)$ *ოპერატორი ფრედჰოლმისაა (შებრუნებადია) ყველა* $s \in (s_0, s_1)$ *და* $p \in (p_0, p_1)$-*სთვის, სადაც* $-\infty < s_0 < s_1 < \infty$, $1 < p_o < p_1 < \infty$, *მაშინ* $\boldsymbol{A}$ *ფრედჰოლმისაა (შესაბამისად შებრუნებადია) სობოლევ-სლობოდეცკის სივრცეში*

$$\mathbf{A} : \widetilde{\mathbb{W}}^s_p(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{W}^s_p(\mathbb{R}^+), \qquad \text{ყველა} \quad s \in (s_0, s_1) \quad \text{და} \quad p \in (p_0, p_1) \quad \text{პარამეტრისთვის}$$

და აქვს იგივე ინდექსი

$$\mathrm{Ind}\,\mathbf{A} = -\mathrm{ind}\ \det\,\mathcal{A}^s_p.$$

წინადადება 3.39 (იხ. დუდუჩავა, 1973, 1995, [29, 33]). *ვთქვათ პარამეტრზე დამოკიდებულ ბანახის სივრცეთა* $\mathfrak{B}^s_1$ *და* $\mathfrak{B}^s_2$ *წყვილს,* $s_1 < s < s_2$, *აქვთ თანაკვეთები* $\mathfrak{B}^{s'}_j \cap \mathfrak{B}^{s''}_j$ *მკვრივი* $\mathfrak{B}^{s'}_j$ *და* $\mathfrak{B}^{s''}_j$-*ში ყველა* $j = 1, 2$, $s', s'' \in (s_1, s_2)$-*სთვის.*

თუ $A : \mathfrak{B}^s_1 \to \mathfrak{B}^s_2$ *წრფივად შემოსაზღვრული ოპერატორი ფრედჰოლმისაა ყველა* $s \in (s_1, s_2)$-*სთვის, მაშინ მას გააჩნია ერთიდაიგივე ბირთვი და კობირთვი* $s \in (s_1, s_2)$ *პარამეტრის ყველა მნიშვნელობისთვის.*

კერძოდ, თუ $A : \mathfrak{B}^s_1 \to \mathfrak{B}^s_2$ *ფრედჰოლმისაა ყველა* $s \in (s_1, s_2)$-*სთვის და შებრუნებადია მხოლოდ* $s_0 \in (s_1, s_2)$ *ერთი მნიშვნელობისთვის, მაშინ ის შებრუნებადია* $s \in (s_1, s_2)$ *პარამეტრის ყველა მნიშვნელობისთვის.*

3.7. სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლების გამოკვლევა ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის

თეორემა 1.11-ის დამტკიცება (იხ. ქვემოთ) თეორემა 1.10-ის გარდა დაფუძნებულია შემდეგ თეორემაზე:

თეორემა 3.40. *ვთქვათ,* $1 < p < \infty$, $r > -1$.

სასაზღვრო ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა (1.34) *სისტემა ფრედჰოლმისაა სობოლევ-სლობოდეცკისა* (1.35a) *და ბესელის პოტენციალთა* (1.35b) *სივრცეებში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ* (1.33) *პირობა სრულდება.*

კერძოდ, (1.34) *სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი u არაკლასიკური* (1.27) *დასმით, თუ* $p = 2$ *და* $r = \dfrac{1}{2}$.

დამტკიცება: (1.34) განტოლებათა სისტემა გადავწეროთ ოპერატორული ფორმით

$$\boldsymbol{M}\Phi = \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{M} := \begin{bmatrix} I & \boldsymbol{K}^1_{-1} \\ \boldsymbol{K}^1_{-1} & I \end{bmatrix}, \tag{3.119a}$$

$$\Phi := \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathbb{W}}^r_p(\mathbb{R}^+), \qquad \mathbf{F} := \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} \in \mathbb{W}^r_p(\mathbb{R}^+), \tag{3.119b}$$

$$\Phi := \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathbb{H}}^r_p(\mathbb{R}^+), \qquad \mathbf{F} := \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^r_p(\mathbb{R}^+) \tag{3.119c}$$

და გამოვიყენოთ წინადადება 3.37, რათა გამოვიკვლიოთ (3.119a) განტოლება (3.119c) დასმით.

(3.116a) და (3.117) ფორმულების გათვალისწინებით $\boldsymbol{M}$-ის სიმბოლოს Γ_1-ზე აქვს შემდეგი სახე

$$\mathcal{M}^r_p(\omega) = \begin{bmatrix} e^{\pi ri}\dfrac{\sin\pi(\Xi + r)}{\sin\pi\Xi} & \dfrac{e^{-\pi ri}}{\sin\pi\Xi} \\ \dfrac{e^{-\pi ri}}{\sin\pi\Xi} & e^{\pi ri}\dfrac{\sin\pi(\Xi + r)}{\sin\pi\Xi} \end{bmatrix}, \quad \omega = (\infty, \xi) \in \overline{\Gamma_1}, \tag{3.120}$$

სადაც $\Xi := \dfrac{1}{p} - i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^+$. ჩვენ შეგვიძლია არ განვიხილოთ ინფორმაცია $\mathcal{M}^r_p(\omega)$ სიმბოლოს შესახებ $\Gamma_2^{\pm}$ და Γ_3 წირებზე, რადგანაც თეორემა 1.10-ის საფუძველზე ჩვენ გვაინტერესებს $\boldsymbol{M}$ ოპერატორის მხოლოდ ლოკალურად შებრუნებადობა 0-ში. 3.37 წინადადების დასკვნითი ნაწილის თანახმად,ეს ინფორმაცია მოცემულია $\mathcal{M}^r_p(\omega)$-ის სიმბოლოში მხოლოდ Γ_1 წირზე.

(3.120) ფორმულის თანახმად $\mathcal{M}^r_p(\infty, \xi)$ სიმბოლო არ არის ელიფსური Γ_1 წირზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ

$$\det \mathcal{M}^r_p(\infty, \xi) = \frac{e^{2\pi ri}\sin^2\pi\left(\dfrac{1}{p} + r - i\xi\right) - e^{-2\pi ri}}{\sin^2\pi\left(\dfrac{1}{p} - i\xi\right)} = 0, \qquad \omega \in \Gamma_1 \tag{3.121}$$

ზოგიერთი $\xi \in \mathbb{R}$-სთვის. ვინაიდან $\xi = \infty$-სთვის (3.121) განტოლება არ სრულდება, ექვივალენტური პირობაა

$$\sin\pi\left(\frac{1}{p}+r-i\xi\right) = \pm e^{-2\pi ri} \quad \text{ზოგიერთი} \quad \xi\in\mathbb{R} \quad \text{და} \pm \quad \text{არჩევისთვის.} \tag{3.122}$$

ვიგულისხმოთ $\xi \neq \infty$. თუ (3.122) განტოლების ორივე მხარეს დავყოფთ რეალურ და წარმოსახვით ნაწილებად

$$\begin{aligned} e^{-2\pi ri} &= \cos\,2\pi\,r - i\sin 2\pi\,r,\\ \sin\pi\left(\frac{1}{p}+r-i\xi\right) &= \sin\pi\left(\frac{1}{p}+r\right)\cosh\pi\xi + i\cos\pi\left(\frac{1}{p}+r\right)\sinh\pi\xi, \end{aligned} \tag{3.123}$$

მივიღებთ (3.121) განტოლების შემდეგ ექვივალენტურ პირობას:

$$\sin\pi\left(\frac{1}{p}+r\right)\cosh\pi\xi = \pm\cos\,2\pi r \quad \text{და} \quad \cos\pi\left(\frac{1}{p}+r\right)\sinh\pi\xi = \pm\sin 2\pi\,r. \tag{3.124}$$

თუ $\xi = 0$, შემდეგი პირობა არის (3.124)-ის ექვივალენტური წარმოდგენა:

$$\begin{cases} \sin 2\pi r = 0 \quad \text{და} \\ \sin\pi\left(\dfrac{1}{p}+r\right) = \pm\cos 2\pi r = \pm 1, \qquad 1<p<\infty, \quad -1<r<\infty, \end{cases} \tag{3.125}$$

რომელსაც გააჩნია შემდეგი ამოხსნი

$$p = 2, \quad r = 0, 1, \ldots. \tag{3.126}$$

თუ

$$\begin{gathered} \xi \neq 0, \infty, \quad \sin\pi\left(\frac{1}{p}+r\right) \neq 0 \quad (\text{მაშინ აგრეთვე} \quad \cos 2\pi\,r \neq 0) \\ \text{და} \quad \cos\pi\left(\frac{1}{p}+r\right) \neq 0 \quad (\text{მაშინ აგრეთვე} \quad \sin 2\pi\,r \neq 0), \end{gathered} \tag{3.127}$$

(3.124)-დან, $\cosh^2\xi - \sinh^2\xi = 1$ იგივეობის გამოყენებით, მივიღებთ შემდეგ ექვივალენტურ პირობას:

$$\frac{\cos^2 2\pi r}{\sin^2\pi\left(\dfrac{1}{p}+r\right)} - \frac{\sin^2 2\pi r}{\cos^2\pi\left(\dfrac{1}{p}+r\right)} = 1. \tag{3.128}$$

საწინააღმდეგო დებულების დასამტკიცებლად, როდესაც (3.127) პირობების გათვალისწინებით (3.124) ტოლობა გამომდინარეობს (3.128)-დან, ჩვენ მხოლოდ უნდა ავირჩიოთ ისეთი $\xi \in \mathbb{R}$, რომ (3.124)-ში შესრულდეს პირველი ტოლობა. მაშინ (3.124)-ში მეორე ტოლობა გამომდინარეობს (3.128)-დან და $\cosh^2\xi - \sinh^2\xi \equiv 1$ იგივეობიდან.

(3.128) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი ექვივალენტური ფორმით

$$\begin{aligned} \cos^2 2\pi r\cos^2\pi\left(\frac{1}{p}+r\right) &- \sin^2 2\pi r\sin^2\pi\left(\frac{1}{p}+r\right) \\ &= \cos^2\pi\left(\frac{1}{p}+r\right)\sin^2\pi\left(\frac{1}{p}+r\right) \end{aligned} \tag{3.129}$$

და უგულებელვყოთ ორივე შეზღუდვა $\xi = 0$ და (3.127), ვინაიდან ამ შემთხვევებს მოიცავს (3.129) განტოლება. მართლაც, (3.126)-დან $p = 2$, $r = 0, 1, \ldots$ მნიშვნელობები არიან (3.129)-ის ამონახსნები. თუ (3.127) პირობა არ სრულდება, მივიღებთ

$$\text{ან} \quad \cos\pi\left(\frac{1}{p}+r\right) = 0 \quad \text{და} \quad \sin\pi\left(\frac{1}{p}+r\right) = \pm 1, \quad \sin 2\pi r = 0,$$
$$\text{ან} \quad \sin\pi\left(\frac{1}{p}+r\right) = 0 \quad \text{და} \quad \cos\pi\left(\frac{1}{p}+r\right) = \pm 1, \quad \cos 2\pi r = 0$$

და უკანასკნელი განტოლების ამონახსნებს შეიცავს (3.129) განტოლების ამონახსნები.

თუ $\cos^2 2\pi r$-ს შევცვლით $1 - \sin^2 2\pi r$-ით, (3.129) განტოლება მარტივად გადაიწერება შემდეგი ექვივალენტური ფორმით:

$$\cos^4\pi\left(\frac{1}{p}+r\right) = \sin^2 2\pi r$$

და, საბოლოოდ

$$\cos^2\pi\left(\frac{1}{p}+r\right) = |\sin 2\pi r| \quad \text{or} \quad \cos 2\pi\left(\frac{1}{p}+r\right) = 2\,|\sin 2\pi r| - 1. \tag{3.130}$$

3.38 წინადადების თანახმად, (3.119a)-ში $\boldsymbol{M}$ ოპერატორი ფრედჰოლმისაა (3.119b) დასმით, თუკი (3.130) პირობა არ სრულდება (იხ. (1.33) პირობა). კერძოდ, ის არის ფრედჰოლმის $p = 2$, $r = -1/2$-სთვის ორივე (3.119b) და (3.119c) დასმით. უფრო მეტიც, თუ სიმბოლოს განვიხილავთ სრულად $\mathfrak{R}$ (იხ. (3.115)-(3.116b)) მარტივად შევამოწმებთ, რომ $\operatorname{ind}\det\mathcal{M}^r_p = 0$ და $\operatorname{Ind}\boldsymbol{M} = -\operatorname{ind}\det\mathcal{M}^r_p = 0$ (იხ. წინადადება 3.37).

ახლა შევნიშნოთ, რომ $\boldsymbol{M}$ არის სუსტი მელინის კონვოლუციის ოპერატორი და შებრუნებადია $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^+)$ სივრცეში (იხ. [25]). ვინაიდან $\widetilde{\mathbb{H}}^r_2(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^+)$ $r > 0$-სთვის, $\boldsymbol{M}$ ოპერატორს აქვს ტრივიალური ბირთვი $\widetilde{\mathbb{H}}^r_2(\mathbb{R}^+)$ სივრცეში, და $\operatorname{Ind}\boldsymbol{M} = 0$ ინდექსის გათვალისწინებით შებრუნებადია ორივე (3.119b) და (3.119c) დასმით $p = 2$, $r = \dfrac{1}{2}$-სთვის. $\square$

თეორემა 1.11-ის დამტკიცება: სასაზღვრო ფსევდოდიფერენციალურ (1.30) განტოლებათა სისტემითვის ფრედჰოლმურობის (1.33) კრიტერიუმი (1.31) და (1.32) დასმებით წარმოადგენს თეორემა 1.10-სა და თეორემა 3.40-ის პირდაპირ შედეგს.

(1.33)-დან გამომდინარეობს, რომ თუ $(r, 1/p)$ წერტილი ეკუთვნის მრუდწირულ ABCD კვადრანტს ნახაზი 2-ში, მაშინ (1.30) განტოლებათა სისტემაში შესაბამისი $\boldsymbol{M}_0$ ოპერატორი ფრედჰოლმისაა ორივე (1.31) და (1.32) დასმით. მეორეს მხირვ, $p = 2$, $r = 1/2$ მნიშვნელობებისთვის, რომლებიც ეკუთვნიან მრუდწირულ ABCD კვადრანტს, $\boldsymbol{M}_0$ ოპერატორი შებრუნებადია (იხ. დასკვნითი მტკიცება 1.10 თერემაში). მაშინ 3.39 წინადადების თანახმად, $\boldsymbol{M}_0$ ოპერატორი შებრუნებადია ორივე (1.31) და (1.32) დასმით ყველა ასეთი $(r, 1/p)$-სთვის, რომელიც ეკუთვნის მრუდწირულ ABCD კვადრანტს ნახაზი 2-ში. $\square$

თეორემა 1.8-ის დამტკიცება. (1.25) სასაზღვრო ამოცანა ფრედჰოლმისაა არაკლასიკური (1.27) დასმით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ (1.30) განტოლებათა სისტემა ფრედჰოლმისაა (1.31) დასმით(იხ. თეორება 1.10). 1.11 თეორემის თანახმად ეს სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ (1.33) პირობა სრულდება (ანალოგიურად, ნახაზი 2-ში ლურჯი ხაზები არ კვეთენ $(r-k, 1/p)$ წერტილს, სადაც $k = 0, 1, \dots$ ისეთია, რომ $0 < r - k \leqslant 1$). თუ $r = s - 1/p$-ს ჩავსვამთ (1.33)-ში, მივიღებთ (1.28) ფრედჰოლმურობის კრიტერიუმს (ანალოგიურად, ნახაზი 1-ში ხაზები არ კვეთენ $(s-k, 1/p)$ წერტილს, სადაც $k = 0, 1, \dots$ ისეთია, რომ $1/2 < s - k \leqslant 1/2$).

ამ თეორემის დამტკიცებული ნაწილის თანახმად (1.25) სასზღვრო ამოცანა ფრედჰოლმისაა, თუ $(s, 1/p)$ წერტილი ეკუთვნის ღია მრუდწირულ ABCD კვადრანტს ნახაზი 1-ში. მეორეს მხრივ, სივრცის კერძო $p = 2$, $s = 1$ პარამეტრებისთვის, რომელიც წარმოადგენს ღია მრუდწირული ABCD კვადრანტის ცენტრს ნახაზი 1-ში, (1.25) სასაზღვრო ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი (იხ. თეორემა 1.6).მაშინ 3.39 წინადადების თანახმად, (1.25) სასაზღვრო ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი არაკლასიკური (1.27) დასმით ყველა ისეთი s და p-სთვის, რომლებისთვისაც $(s, 1/p)$ წერტილი ეკუთვნის ღია მრუდწირულ ABCD კვადრანტს ნახაზი 1-ში. $\square$

3.8. პოტენციალთა ოპერატორები და სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებები ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის

ვთქვათ $\mathcal{S}$ არის ჩაკეტილი, საკმარისად გლუვი ორიენტირებული ზედაპირი $\mathbb{R}^n$ სივრცეში. ჩვენ გამოვიყენებთ აღნიშვნას $\mathbb{X}^s_p(\mathcal{S})$ ან ბესელის პოტენციალთა $\mathbb{H}^s_p(\mathcal{S})$ ან სობოლევ-სლობოდეცკის $\mathbb{W}^s_p(\mathcal{S})$ სივრცეებისთვის ჩაკეტილი ან ღია $\mathcal{S}$-სთვის და მსგავს აღნიშვნას $\widetilde{\mathbb{X}}^s_p(\mathcal{S})$ ღია $\mathcal{S}$-სთვის.

განვიხილოთ შემდეგი სივრცე

$$\mathbb{X}^s_{p,\#}(\mathcal{S}) := \left\{\varphi \in \mathbb{X}^s_p(\mathcal{S}) \ : \ (\varphi, 1) = 0\right\}, \tag{3.131}$$

სადაც $(\cdot,\cdot)$ აღნიშნავს დუალურ შეწყვილებას შეუღლებულ სივრცეებს შორის. ცხადია, რომ $\mathbb{X}^s_{p,\#}(\mathcal{S})$ არ შეიცავს არანულოვან კონსტანტებს: თუ $c_0 = \mathrm{const} \in \mathbb{X}^s_{p,\#}(\mathcal{S})$ მაშინ

$$0 = (c_0, 1) = c_0(1,1) = c_0 \mathrm{mes}\, \mathcal{S}$$

და $c_0 = 0$. უფრო მეტი, $\mathbb{X}^s_p(\mathcal{S})$ იყოფა პირდაპირ ჯამად

$$\mathbb{X}^s_p(\mathcal{S}) = \mathbb{X}^s_{p,\#}(\mathcal{S}) + \{\mathrm{const}\} \tag{3.132}$$

და დუალური (შეუღლებული) სივრცეა

$$(\mathbb{X}^s_{p,\#}(\mathcal{S}))^* = \mathbb{X}^{-s}_{p',\#}(\mathcal{S}), \qquad p' := \frac{p}{p-1}. \tag{3.133}$$

შემდეგი თეორემა წარმოადგენს დუდუჩავა, 2014, [36] სტატიაში დამტკიცებული თეორემა 10-ის ნაწილს.

თეორემა 3.41. *ვთქვათ $\mathcal{S}$ არის ℓ-გლუვი, $\ell = 1, 2, \ldots$, $1 < p < \infty$ და $|s| \leqslant \ell$. ვთქვათ $\mathbb{X}^s_{p,\#}(\mathcal{S})$ არის* (3.131)-(3.133)-*ში მოცემული სივრცე.*

ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორი $\Delta^2_{\mathcal{S}} := \Delta_{\mathcal{S}}\Delta_{\mathcal{S}}$ შებრუნებადია სივრცეებს შორის, რომელიც არ შეიცავს კონსტანტებს

$$\Delta^2_{\mathcal{S}} \ : \ \mathbb{X}^{s+1}_{p,\#}(\mathcal{S}) \to \mathbb{X}^{s-1}_{p,\#}(\mathcal{S}), \tag{3.134}$$

ე.ი. გააჩნია ფუნდამენტური $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$ ამონახსნი (3.134) *პირობებში.*

ვთქვათ $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ არის ქვეზედაპირი გლუვი $\Gamma := \partial\mathcal{C}$ საზღვრით. ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორის ფუნდამენტური $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$ ამონახსნის საშუალებით $\mathcal{C}$ ზედაპირზე მოცემული გვაქვს სტან-

დარტული ფენოვანი პოტენციალები:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{N}_{\mathcal{C}}v(x) := \int_{\mathcal{C}} \mathcal{K}_{\mathcal{S}}(x,y)v(y)\,d\sigma\\
&\boldsymbol{W}_{(0,\Gamma)}v(x) := \int_{\Gamma} (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\Delta\mathcal{K}_{\mathcal{S}})(x,\tau)v(\tau)d\tau,\\
&\boldsymbol{W}_{(-1,\Gamma)}v(x) := \int_{\Gamma} (\Delta\mathcal{K}_{\mathcal{S}})(x,\tau)v(\tau)d\tau, \qquad x\in\mathcal{C},\\
&\boldsymbol{W}_{(-2,\Gamma)}v(x) := \int_{\Gamma} (\partial_{\boldsymbol{\nu}_{\Gamma(\tau)}}\mathcal{K}_{\mathcal{S}})(x,\tau)v(\tau)d\tau, \qquad x\in\mathcal{C},\\
&\boldsymbol{W}_{(-3,\Gamma)}v(x) := \int_{\Gamma} \mathcal{K}_{\mathcal{S}}(x,\tau)v(\tau)d\tau, \qquad x\in\mathcal{C}.
\end{aligned}
\tag{3.135}
$$

ზემოთ მოცემულ პოტენციალურ ოპერატორებს აქვთ შემდეგი შემოსაზღვრულობის თვისე-ბები

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} &: \mathbb{H}^s_{p,\#}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{H}^{s+4}_{p,\#}(\mathcal{C}),\\
\boldsymbol{W}_{(0,\Gamma)} &: \mathbb{H}^s_{p,\#}(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{H}^{s+3+\frac{1}{p}}_{p,\#}(\mathcal{C}),\\
\boldsymbol{W}_{(-1,\Gamma)} &: \mathbb{H}^s_{p,\#}(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{H}^{s+2+\frac{1}{p}}_{p,\#}(\mathcal{C}),\\
\boldsymbol{W}_{(-2,\Gamma)} &: \mathbb{H}^s_{p,\#}(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{H}^{s+1+\frac{1}{p}}_{p,\#}(\mathcal{C}),\\
\boldsymbol{W}_{(-3,\Gamma)} &: \mathbb{H}^s_{p,\#}(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{H}^{s+\frac{1}{p}}_{p,\#}(\mathcal{C})
\end{aligned}
$$

და შერეული (1.38) სასაზღვრო ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნი $\mathbb{H}^2_{\#}(\mathcal{C}) := \mathbb{H}^2_{2,\#}(\mathcal{C})$ სივრცეში წარმოიდგინება ფორმულით:

$$
\begin{aligned}
u(x) = \boldsymbol{N}_{\mathcal{C}}f(x) + \boldsymbol{W}_{(0,\Gamma)}u^+(x) - \boldsymbol{W}_{(-1,\Gamma)}(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}u)^+(x) + \boldsymbol{W}_{(-2,\Gamma)}(\Delta u)^+(x)&\\
-\boldsymbol{W}_{(-3,\Gamma)}(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\Delta u)^+(x), \qquad u\in\mathbb{H}^2_{\#}(\mathcal{C}), \quad x\in\mathcal{C}.&
\end{aligned}
\tag{3.136}
$$

ვინაიდან $\mathbb{X}^s_p = \mathbb{X}^s_{p,\#} + \{\mathrm{const}\}$, ფენოვანი პოტენციალები მთელ სივრცეში შეგვიძლია გა-ვაგრძელოთ შემდეგნაირად:

$$
\begin{aligned}
\varphi = \varphi_0 + c - \text{თვის}, \qquad \varphi_0\in\mathbb{X}^s_{p,\#}, \quad c=\mathrm{const},\\
\boldsymbol{W}_{(j,\Gamma)}\varphi = \boldsymbol{W}_{(j,\Gamma)}\varphi_0 + c, \quad \boldsymbol{N}_{\mathcal{C}}f = \boldsymbol{N}_{\mathcal{C}}f_0 + c, \quad j=\overline{-3,0}
\end{aligned}
\tag{3.137}
$$

ე.ი. პირობებით $\boldsymbol{W}_{(j,\Gamma)}c = \boldsymbol{N}_{\mathcal{C}}c = c$.

ლემა 3.42. (3.136) *წარმოდგენის ფორმულა სამართლიანი ამონახსნისათვის* $\mathbb{H}^2(\mathcal{C})$ *სივრცე-ში, სადაც პოტენციალები გაგრძელებულია, როგორც* (3.137)*-ში.*

დამტკიცება: მართლაც, ვინაიდან $u = u_0 + c$, $u_0\in\mathbb{H}^s_{p,\#}(\mathcal{C})$, $u\in\mathbb{H}^s_p(\mathcal{C})$, გამოვიყენებთ პო-ტენციალის გაგრძელებას (3.137) წარმოდგენის ფორმულაში (3.136) ამონახსნისათვის $\mathbb{H}^2_{\#}(\mathcal{C})$

სივრცეში და მივიღებთ (3.136) წარმოდგენის ფორმულას ამონახსნისათვის $\mathbb{H}^2(\mathcal{C})$ სივრცეში:

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0(x) + c = \boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} f_0(x) + \boldsymbol{W}_{(0,\Gamma)} u_0^+(x) - \boldsymbol{W}_{(-1,\Gamma)}(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} u_0)^+(x) \\ &+ \boldsymbol{W}_{(-2,\Gamma)}(\Delta u_0)^+(x) - \boldsymbol{W}_{(-3,\Gamma)}(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\Delta u_0)^+(x) + c \\ &= \boldsymbol{N}_{\mathcal{C}}(f(x) - c) + \boldsymbol{W}_{(0,\Gamma)}(u-c)^+(x) - \boldsymbol{W}_{(-1,\Gamma)}(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}(u-c))^+(x) \\ &+ \boldsymbol{W}_{(-2,\Gamma)}(\Delta(u-c))^+(x) - \boldsymbol{W}_{(-3,\Gamma)}(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\Delta(u-c))^+(x) + c \\ &= \boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} f(x) + \boldsymbol{W}_{(0,\Gamma)} u^+(x) - \boldsymbol{W}_{(-1,\Gamma)}(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} u)^+(x) \\ &+ \boldsymbol{W}_{(-2,\Gamma)}(\Delta u)^+(x) - \boldsymbol{W}_{(-3,\Gamma)}(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\Delta u)^+(x), \qquad u \in \mathbb{H}^1(\mathcal{C}), \quad x \in \mathcal{C}. \end{aligned} \tag{3.138}$$

□

თეორემა 1.17-ის დამტკიცება: განვიხილოთ პლემელის ფორმულები

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{W}_{(0,\Gamma)} v)^\pm(t) = \pm\frac{1}{2} v(t) + \boldsymbol{W}_{(0,\Gamma)} v(t), \quad (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \boldsymbol{V}^0_{(0,\Gamma)}\psi)^\pm(t) = \boldsymbol{V}^1_{(+1,\Gamma)} v(t), \\ &(\boldsymbol{W}_{(-1,\Gamma)} v)^\pm(t) = \boldsymbol{V}^0_{(-1,\Gamma)} v(t), \quad (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \boldsymbol{W}_{(-1,\Gamma)})^\pm(t) = \mp\frac{1}{2} v(t) + \boldsymbol{V}^1_{(0,\Gamma)} v(t), \\ &(\boldsymbol{W}_{(-2,\Gamma)} v)^\pm(t) = \boldsymbol{V}^0_{(-2,\Gamma)} v(t), \quad (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \boldsymbol{W}_{(-2,\Gamma)})^\pm(t) = \boldsymbol{V}^1_{(-1,\Gamma)} v(t), \\ &(\boldsymbol{W}_{(-3,\Gamma)} v)^\pm(t) = \boldsymbol{V}^0_{(-3,\Gamma)} v(t), \quad (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \boldsymbol{W}_{(-3,\Gamma)})^\pm(t) = \boldsymbol{V}^1_{(-2,\Gamma)} v(t), \end{aligned} \tag{3.139}$$

სადაც $t \in \partial\Omega_\alpha$ და

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}^0_{(-3,\Gamma)} v(t) &:= \int_\Gamma \mathcal{K}_{\mathcal{S}}(t,\tau) v(\tau) d\tau, \qquad t \in \Gamma, \\ \boldsymbol{V}^0_{(-2,\Gamma)} v(t) &:= \int_\Gamma (\partial_{\boldsymbol{\nu}_{\Gamma(\tau)}} \mathcal{K}_{\mathcal{S}})(t,\tau) v(\tau) d\tau, \\ \boldsymbol{V}^1_{(-2,\Gamma)} v(t) &:= \int_\Gamma (\partial_{\boldsymbol{\nu}_{\Gamma(t)}} \mathcal{K}_{\mathcal{S}})(t,\tau) v(\tau) d\tau, \\ \boldsymbol{V}^1_{(-1,\Gamma)} v(t) &:= \int_\Gamma (\partial_{\boldsymbol{\nu}_{\Gamma(t)}} \partial_{\boldsymbol{\nu}_{\Gamma(\tau)}} \mathcal{K}_{\mathcal{S}})(t,\tau) v(\tau) d\tau, \end{aligned} \tag{3.140}$$

წარმოადგენენ შესაბამისად -3, -2, -2 და -1 რიგის ფსევდოდიფერენციალურ ოპერატორებს Γ საზღვარზე, და განსაზღვრავენ შესაბამისი $\boldsymbol{W}_{-3,\Gamma}$, $\boldsymbol{W}_{-2,\Gamma}$, $\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\boldsymbol{W}_{-3,\Gamma}$ და $\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\boldsymbol{W}_{-2,\Gamma}$ პოტენციალების პირდაპირ მნიშვნელობას.

თუ (3.139) პლემელის ფორმულებს გამოვიყენებთ (3.136) განტოლებაში, მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\left\{ \begin{aligned} &u^+(t) = g(t) = (\boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} f)^+ + \frac{1}{2} g(t) + \boldsymbol{V}^0_{(0,\Gamma)} g(t) - \boldsymbol{V}^0_{(-1,\Gamma)} h(t) \\ &\qquad\qquad + \boldsymbol{V}^0_{(-2,\Gamma)}\varphi(t) - \boldsymbol{V}^0_{(-3,\Gamma)}\psi(t), \\ &(\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} u)^+(t) = h(t) = (\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} \boldsymbol{N}_{\mathcal{C}} f)^+ + \boldsymbol{V}^1_{(+1,\Gamma)} g(t) + \frac{1}{2} h(t) - \boldsymbol{V}^1_{(0,\Gamma)} h(t) \\ &\qquad\qquad + \boldsymbol{V}^1_{(-1,\Gamma)}\varphi(t) - \boldsymbol{V}^1_{(-2,\Gamma)}\psi(t), \qquad t \in \Gamma. \end{aligned} \right.$$

ჩვენ მივიღეთ (1.42) სისტემა, სადაც

$$\begin{aligned} G &:= \left[\frac{1}{2}g - (\boldsymbol{N}_{\mathcal{C}}f)^+ - \boldsymbol{V}^0_{(0,\Gamma)}g + \boldsymbol{V}^0_{(-1,\Gamma)}h\right] \in \mathbb{H}^{s-1/p}_p(\Gamma), \\ H &:= \left[(\frac{1}{2}h - \partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\boldsymbol{N}_{\mathcal{C}}f)^+ - \boldsymbol{V}^1_{(0,\Gamma)}g + \boldsymbol{V}^1_{(-1,\Gamma)}h\right] \in \mathbb{H}^{s-1-1/p}_p(\Gamma). \end{aligned} \tag{3.141}$$

ამჯერად, ჩვენ დავამტკიცეთ თეორემა 1.17-ის შებრუნებული დებულება: თუ u არის (1.38) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი, მაშინ φ და ψ ფუნქციები წარმოადგენენ (1.42) განტოლებათა სისტემის ამონახსნებს.

პირდაპირი დებულება კიდევ უფრო მარტივად დასამტკიცებელია:

- (3.138) წარმოდგენის ფორმულაში პოტენციალების საშუალებით მოცემული ფუნქცია აკმაყოფილებს (1.38) განტოლებას.
- თუ φ და ψ წარმოადგენენ (1.42) განტოლებათა სისტემის ამონახსნებს, (3.139) პლემელის ფორმულების გამოყენებით მარტივად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ (3.138)-ში u ფუნქცია აკმაყოფილებს (1.38) სასაზღვრო ამოცანაში მოცემულ სასაზღვრო პირობებს.

(1.38) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა (1.39) კლასიკური დასმით მოცემულია თეორემა 1.15-ში მაშინ, როცა (1.42) განტოლებათა სისტემისთვის ის გამომდინარეობს (1.38) სასაზღვრო ამოცანის ექვივალენტურობიდან. □

ამოცანის გამოკვლევის დარჩენილი ნაწილი მოიცავს (1.42) განტოლებათა სისტემის ამოხსნადობის თვისებების დამტკიცებას არასკლასიკური (1.40) დასმით.

2-განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა

$$\Delta^2 u = f^0 \qquad \mathbb{R}^2 - \text{ზე}, \qquad u \in \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^2), \quad f^0 \in \mathbb{H}^{s-4}_p(\mathbb{R}^2), \tag{3.142}$$

ასევე განვიხილოთ მოდელური

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = f_1(x), & x \in \mathbb{R}^2_+, \\ u^+(t) = g_1(t), & t \in \mathbb{R}, \\ -(\partial_2 u)^+(t) = h_1(t), & t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.143}$$

სასაზღვრო ამოცანა ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის $\mathbb{R}^2_+ := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ზედა ნახევარსიბრტყეში,სადაც $\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} = -\partial_2$ არის $\mathbb{R}^2_+$-ის საზღვარზე მოცემული ნორმალური წარმოებული.

(3.143) სასაზღვრო ამოცანა განიხილება არაკლასიკური დასმით:

$$\begin{aligned} f_1 \in \widetilde{\mathbb{H}}^{s-4}_p(\mathbb{R}^2_+) \cap \widetilde{\mathbb{H}}^{-2}_0(\mathbb{R}^2_+), \quad g_1 \in \mathbb{H}^{s-1/p}_p(\mathbb{R}), \quad h_1 \in \mathbb{H}^{s-1-1/p}_p(\mathbb{R}), \\ 1 < p < \infty, \qquad s > \frac{1}{p}. \end{aligned} \tag{3.144}$$

წინადადება 3.43. (3.142) *ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი.*

დამტკიცება: დებულება წარმოადგენს კარგად ცნობილ კლასიკურ შედეგს, რომელიც მოცემულია კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების ბევრ სახელმძღვანელოში (იხილეთ, მაგ. სიაო-ვენდლანდი, 2008, [45]). □

როგორც თეორამა 1.15-ის კერძო შემთხვევა (მარტივად მტკიცდება ლაქს-მილგრამის ლემის საშუალებით) გვაქვს შემდეგი წინადადება:

წინადადება 3.44. *სასაზღვრო ამოცანას* (3.143) *გააჩნია ერთდერთი ამოხახსნი* u *კლასიკური დასმით*

$$u \in \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^2_+), \quad f_1 \in \widetilde{\mathbb{H}}_0^{-2}(\mathbb{R}^2_+), \quad g_1 \in \mathbb{H}^{3/2}(\mathbb{R}), \quad h_1 \in \mathbb{H}^{1/2}(\mathbb{R}),$$

ლემა 3.45. (1.38) *სასაზღვრო ამოცანა არის ფრედჰოლმის არაკლასიკური* (1.40) *დასმით, თუ მოდელური* (3.143) *შერეული სასაზღვრო ამოცანა არის ლოკალურად ფრედჰოლმის (ე.ი. არის ლოკალურად შებრუნებადი)* 0*-ში არაკლასიკური* (3.144) *დასმით.*

დამტკიცება: ჩვენ გამოვიყენებთ (1.38) სასაზღვრო ამოცანის კვაზი-ლოკალიზაციას უფრო ზოგად არაკლასიკური (1.40) დასმით, რომელიც ასევე მოიცავს კლასიკურ (1.39) დასმას როგორც კერძო შემთხვევას (სასაზღვრო ამოცანების კვაზი-ლოკალიზაციის დეტალებთან დაკავშირებით იხილეთ კასტრო, 2003; დუდუჩავა, 1984, [7, 21] და ასევე დიდენკო & ზილბერმანი, 2008; გოხბერგი & კრუპნიკი, 1979; სიმონენკო, 1965, [19, 40, 67] ლოკალიზაციაზე და კვაზი-ლოკალიზაციაზე ზოგადი შედეგებისთვის).

კვაზი-ლოკალიზაციის დაწყებამდე მოკლედ ავხსნათ რატომ შეიძლება შესრულდეს კვაზი-ლოკალიზაცია ბესელის პოტენციალთა (ბესოვის) სივრცეებში.

ზემოთ როგორც უკვე აღვნიშნეთ, მალოკალიზებელი კლასები შედგება გლუვი ფუნქციებზე გამრავლების ოპერატორებისაგან და ვინაიდან ლოკალიზაცია სრულდება ფაქტორ-სივრცეში კომპაქტური ოპეატორების მიმართ, საკმარისია შევნიშნოთ, რომ გლუვი ფუნქციები გადაასმადია ბესელის პოტენციალებთან ფაქტორ-ალგებრაში (იხ. დუდუჩავა, 1984, [21]) და, მაშასადამე მათი ნორმები ემთხვევა $\mathbb{L}_p$-სივრცის ნორმას, ე.ი სუპრემუმ ნორმას. ეს ამარტივებს ლოკალიზაციას ანუ "კოეფიციენტების გაყინვას".

განვიხილოთ "გასწორება": ვინაიდან "გადმოსმული"("pull-back") საწყისი ოპერატორებისა და მათი ლოკალურ წარმომადგენლებს შორის სხაობა ლოკალურად კომპაქტურია $\mathbb{L}_p$-ში და შემოსაზღვრულია ბესელის პოტენციალთა $\mathbb{H}^s_p$ სივრცეებში, მაშინ ის ლოკალურად კომპაქტურია ყველა $\mathbb{H}^r_p$-სივრცეებში $r < s$-სთვის (კრასნოსელსკის თეორემა).

$\omega \in \overline{\mathcal{C}}$ წერტილში კვაზი-ლოკალიზაციით ჩვენ პირველად ვახდენთ $\mathcal{C}$ ზედაპირის ლოკალიზა-

ციას მხები სიბრტყეზე $\mathbb{R}^2(\omega)$ (მხები ნახევარსიბრტყეზე $\mathbb{R}^2_+(\omega)$), $\omega \in \mathcal{C}$ წერტილში ($\omega \in \Gamma = \partial\mathcal{C}$, წერტილში შესაბამისად). დიფერენციალური ოპერატორები დარჩება იგივე

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{R}^2} &:= \sum_{j=1}^{3} \mathcal{D}_j^2, \quad \mathcal{D}_j = \partial_j - \nu_j \partial_{\boldsymbol{\nu}}, \\ \partial_{\boldsymbol{\nu}} &= \sum_{j=1}^{3} \nu_j \partial_j, \quad \partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma} = \sum_{j=1}^{3} \nu_{\Gamma,j} \mathcal{D}_j, \end{aligned} \tag{3.145}$$

მაგრამ $\mathbb{R}^2$ მხები სიბრტყის ნორმალური ვექტორი $\boldsymbol{\nu}(\omega)$ და მხები სიბრტყის საზღვრის $\mathbb{R}(\omega) = \partial\mathbb{R}^2_+(\omega)$ ნორმალური ვექტორი $\boldsymbol{\nu}_\Gamma(\omega)$ არიან კონსტანტები. შემდეგ ჩვენ მოვაბრუნებთ $\mathbb{R}^2(\omega)$ და $\mathbb{R}^2_+(\omega)$ მხებ სიბრტყეებს, რათა შევუთავსოთ კანონიკურ $\mathbb{R}^2$ და $\mathbb{R}^2_+$ სიბრტყეებს. ნორმალური ვექტორული ველები გადავა $\boldsymbol{\nu} = (0, 0, 1)$ და $\boldsymbol{\nu}_\Gamma = (0, -1, 0)$-ში. მობრუნება არის სივრცეების $\mathbb{W}^r_p(\mathbb{R}^2(\omega)) \to \mathbb{W}^r_p(\mathbb{R}^2)$, $\mathbb{W}^r_p(\mathbb{R}^2_+(\omega)) \to \mathbb{W}^r_p(\mathbb{R}^2_+)$, $\widetilde{\mathbb{W}}^r_p(\mathbb{R}^2_+(\omega)) \to \widetilde{\mathbb{W}}^r_p(\mathbb{R}^2_+)$ და ა.შ. იზომორფიზმი და ოპერატორებს (3.145)-ში გადაიყვანს შემდეგ ოპერატორებში

$$\begin{gathered} \Delta_{\mathbb{R}^2(\omega)} \ \to \ \Delta := \sum_{j=1}^{2} \partial_j^2, \quad \mathcal{D}_j \ \to \ \partial_j, \quad j = 1, 2, \quad , \mathcal{D}_3 \ \to \ 0, \\ \partial_{\boldsymbol{\nu}(\omega)} \ \to \ \partial_3, \quad \partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma(\omega)} \ \to \ -\partial_2 \end{gathered}$$

და (3.142), (3.143) მივიღებთ როგორც (1.38) სასაზღვრო ამოცანის ლოკალურ წარმომადგენლებს.

(1.38) სასაზღვრო ამოცანისათვის (1.40) არაკლაისკური დასმით მივიღებთ შემდეგ ლოკალურად კვაზი-ექვივალენტურ განტოლებებს და სასაზღვრო ამოცანებს $\omega \in \overline{\mathcal{C}}$ ზედაპირის განსხავავებულ წერტილებში:

i. (3.142) განტოლებას 0 წერტილში, თუ $\omega \in \mathcal{C}$ წარმოადგენს ზედაპირის შიგა წერტილს;

iv. (3.143) შერეულ სასაზღვრო ამოცანას არაკლასიკური (3.144) დასმით 0 წერილში, თუ $\omega \in \Gamma$ წარმოადგენს წერტილს საზღვარზე.

წინამდებარე თეორემის ძირითადი დასკვნა (1.38) და (3.143) სასაზღვრო ოპერატორების ფრედჰოლმის თვისებებზე გამომდინარეობს წინადადება 3.43-დან და კვაზი-ლოკალიზაციის შესახებ ძირითადი თეორემიდან მივიღებთ, რომ (იხილეთ სტატიები კასტრო, 2003; დიდენკო & ზილბერმანი, 2008; დუდუჩავა, 1984; გოხბერგი & კრუპნიკი, 1979; სიმონენკო, 1965, [7, 21, 19, 40, 67]): (1.38), (1.40) სასაზღვრო ამოცანა არის ფრედჰოლმის, თუ ყველა ლოკალური წარმომადგენელი (3.142) და (3.143) არაკლასიკური დასმით არის ლოკალურად ფრედჰოლმის (ე.ი. არის ლოკალურად შებრუნებადი). □

ახლა ჩვენ შევიზღუდებით მოდელური შერეულ სასაზღვრო ამოცანის (3.143) განხილვით. ამისათვის გავიხსენოთ, რომ ფუნქცია

$$\mathcal{K}^2_\Delta(x) := \frac{1}{8\pi}|x - y|^2 \ln|x - y|$$

წარმოადგენს ორი ცვლადის ბი-ლაპლასის განტოლების ფუნდამენტურ ამონხასნს

$$\begin{aligned}&\Delta^2\mathcal{K}^2_\Delta(x)=\delta(x), \qquad x\in\mathbb{R}^2,\\ &\Delta^2=(\partial_1^2+\partial_2^2)^2=(\partial_{\boldsymbol{\nu}}^2+\partial_\ell^2)^2.\end{aligned} \tag{3.146}$$

სტანდარტული ნიუტონის და ფენოვანი პოტენციალური ოპერატორები (იხ.. (3.135)) აკმაყოფილებენ შემდეგ ფორმებს:

$$\boldsymbol{N}_{\mathbb{R}^2_+}v(x):=\frac{1}{8\pi}\int_{\mathbb{R}^2_+}|x-y|^2\ln|x-y|v(y)\,dy,$$

$$\boldsymbol{W}_{(0,\mathbb{R})}v(x):=-\frac{1}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\partial_{y_2}(\partial^2_{y_1}+\partial^2_{y_2})|(x_1,x_2)-(\tau,y_2)|^2\ln|(x_1,x_2)-(\tau,y_2)|\Big|_{y_2=0}v(\tau)\,d\tau,,$$

$$\boldsymbol{W}_{(-1,\mathbb{R})}v(x):=\frac{1}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}(\partial^2_{y_1}+\partial^2_{y_2})|(x_1,x_2)-(\tau,y_2)|^2\ln|(x_1,x_2)-(\tau,y_2)|\Big|_{y_2=0}v(\tau)\,d\tau,,$$

$$\boldsymbol{W}_{(-2,\mathbb{R})}v(x):=-\frac{1}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\partial_{y_2}|(x_1,x_2)-(\tau,y_2)|^2\ln|(x_1,x_2)-(\tau,y_2)|\Big|_{y_2=0}v(\tau)\,d\tau,,$$

$$\boldsymbol{W}_{(-3,\mathbb{R})}v(x):=\frac{1}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}|x-(\tau,0)|^2\ln|x-(\tau,0)|v(\tau)\,d\tau,$$

ფენოვანი პოტენციალების (იხილეთ (3.140)) საშუალებით წარმოდგენილი ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორები $\boldsymbol{V}^0_{-3,\mathbb{R}}$, $\boldsymbol{V}^0_{-2,\mathbb{R}}$, $\boldsymbol{V}^1_{-2,\mathbb{R}}$ and $\boldsymbol{V}^1_{-1,\mathbb{R}}$ აკმაყოფილებენ შემდეგ ფორმას:

$$\boldsymbol{V}^0_{(-3,\mathbb{R})}v(x):=\frac{1}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\big((x_1-\tau)^2+x_2^2\big)\ln\big((x_1-\tau)^2+x_2^2\big)^{1/2}v(\tau)d\tau, \quad t\in\mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}^0_{(-2,\mathbb{R})}v(x)&:=-\frac{1}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\partial_{y_2}\big((x_1-\tau)^2+(x_2-y_2)^2\big)\ln\big((x_1-\tau)^2+(x_2-y_2)^2\big)^{1/2}\Big|_{y_2=0}v(\tau)d\tau\\ &:=\frac{(x_2-y_2)}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\big(2\ln\big((x_1-\tau)^2+(x_2-y_2)^2\big)^{1/2}+1\big)\Big|_{y_2=0}v(\tau)d\tau\\ &:=\frac{x_2}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\big(2\ln\big((x_1-\tau)^2+x_2^2\big)^{1/2}+1\big)v(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}^1_{(-2,\mathbb{R})}v(x)&:=-\frac{1}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\partial_{x_2}\big((x_1-\tau)^2+(x_2-y_2)^2\big)\ln\big((x_1-\tau)^2+(x_2-y_2)^2\big)^{1/2}\Big|_{y_2=0}v(\tau)d\tau\\ &:=\frac{(y_2-x_2)}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\big(2\ln\big((x_1-\tau)^2+(x_2-y_2)^2\big)^{1/2}+1\big)\Big|_{y_2=0}v(\tau)d\tau\\ &:=-\frac{x_2}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\big(2\ln\big((x_1-\tau)^2+x_2^2\big)^{1/2}+1\big)v(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}^1_{(-1,\mathbb{R})}v(x)&:=-\frac{1}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\partial^2_{x_2}\big((x_1-\tau)^2+(x_2-y_2)^2\big)\ln\big((x_1-\tau)^2+(x_2-y_2)^2\big)^{1/2}\Big|_{y_2=0}v(\tau)d\tau\\ &:=-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\Big(\ln\big((x_1-\tau)^2+(x_2-y_2)^2\big)^{1/2}+\frac{(y_2-x_2)^2}{(x_1-\tau)^2+(x_2-y_2)^2}+\frac{1}{2}\Big)\Big|_{y_2=0}v(\tau)d\tau\\ &:=-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\Big(\ln\big((x_1-\tau)^2+x_2^2\big)^{1/2}+\frac{x_2^2}{(x_1-\tau)^2+x_2^2}+\frac{1}{2}\Big)v(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

და როდესაც $x_2 \to 0$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{V}_{(-3,\mathbb{R})}v(t) := \lim_{x_2\to 0} \boldsymbol{V}^0_{(-3,\mathbb{R})}v(x) = \frac{1}{8\pi}\int_{\mathbb{R}} (t-\tau)^2 \ln|t-\tau| v(\tau)d\tau,\\ &\boldsymbol{V}_{(-2,\mathbb{R})}v(t) := \lim_{x_2\to 0} \boldsymbol{V}^0_{(-2,\mathbb{R})}v(x) = 0, \quad \boldsymbol{V}^*_{(-2,\mathbb{R})}v(t) := \lim_{x_2\to 0} \boldsymbol{V}^1_{(-2,\mathbb{R})}v(x) = 0, \qquad (3.147)\\ &\boldsymbol{V}_{(-1,\mathbb{R})}v(t) := \lim_{x_2\to 0} \boldsymbol{V}^1_{(-1,\mathbb{R})}v(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \big(\ln|t-\tau| + \frac{1}{2}\big) v(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა.

ლემა 3.46. *ვთქვათ $1 < p < \infty$, $s > \dfrac{1}{p}$. ვთქვათ $g_1 \in \mathbb{H}^{s-1/p}_p(\mathbb{R})$ და $h_1 \in \mathbb{H}^{s-1-1/p}_p(\mathbb{R})$ (არაკლასიკური ფორმულირება (3.144)).*

(3.143) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნი წარმოიდიგნება ფორმულით

$$\begin{aligned} u(x) = \boldsymbol{N}_{\mathbb{R}^2_+} f(x) + \boldsymbol{W}_{(0,\mathbb{R})} g_1(x) - \boldsymbol{W}_{(-1,\mathbb{R})} h_1(x) + \boldsymbol{W}_{(-2,\mathbb{R})}\varphi_0(x)&\\ -\boldsymbol{W}_{(-3,\mathbb{R})}\psi_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^2& \qquad (3.148) \end{aligned}$$

სადაც φ^0 და ψ^0 წარმოადგენენ ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხასნებს

$$\left\{ \begin{aligned} &\boldsymbol{V}^0_{(-2,\mathbb{R})}\varphi_0 - \boldsymbol{V}^0_{(-3,\mathbb{R})}\psi_0 = G_0 \qquad \text{on} \quad \mathbb{R},\\ &\boldsymbol{V}^1_{(-1,\mathbb{R})}\varphi_0 - \boldsymbol{V}^1_{(-2,\mathbb{R})}\psi_0 = H_0 \qquad \text{on} \quad \mathbb{R}, \end{aligned} \right. \qquad (3.149)$$

$$\begin{aligned} &\varphi_0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^{s-1/p}_p(\mathbb{R}), \quad \psi_0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^{s-1-1/p}_p(\mathbb{R}),\\ &G_0 \in \mathbb{H}^{s-1/p}_p(\mathbb{R}), \quad H_0 \in \mathbb{H}^{s-1-1/p}_p(\mathbb{R}), \qquad (3.150) \end{aligned}$$

სადაც

$$\begin{aligned} G_0 &:= \Big[\frac{1}{2}g_1 - (\boldsymbol{N}_{\mathbb{R}^2_+} f)^+ - \boldsymbol{V}^0_{(0,\mathbb{R})} g_1 + \boldsymbol{V}^0_{(-1,\mathbb{R})} h_1\Big] \in \mathbb{H}^{s-1/p}_p(\mathbb{R}),\\ H_0 &:= \Big[(\frac{1}{2}h_1 - \partial_{\boldsymbol{\nu}_\Gamma}\boldsymbol{N}_{\mathbb{R}^2_+} f)^+ - \boldsymbol{V}^1_{(0,\mathbb{R})} g_1 + \boldsymbol{V}^1_{(-1,\mathbb{R})} h_1\Big] \in \mathbb{H}^{s-1-1/p}_p(\Gamma). \end{aligned}$$

სასაზღვრო ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა (3.149) სისემას აქვს ამოხასნის ერთადერთი φ_0 და ψ_0 წყვილი კლასიკურ შემთხვევაში $p = 2$, $s = 1$.

დამტკიცება: თეორემა 1.17-ის დამტკიცების სიტყვა-სიტყვით გამეორებით და წარმოდგენის (3.148) ფორმულის საშუალებით დავამტკიცებთ არაკლასიკური (3.144) დასმით (3.143) სასაზღვრო ამოცანისა და (3.149) განტოლებათა სისტემის ექვივალენტობას.

(3.143) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობის არსებობა და ერთადერთობა (3.144) კლასიკური დასმით მოცემულია წინადადება 3.44-ში მაშინ, როცა (3.149) განტოლებათა სისტემისთვის ის გამომდინარეობს (3.143) სასაზღვრო ამოცანის ექვივალენტობის დამტკიცებიდან. □

ლემა 3.47. *ვთქვათ* $1 < p < \infty$, $s > \dfrac{1}{p}$.

(3.149) *სასაზღვრო ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა ლოკალურად შებრუნებადია* 0*-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ* (1.45) *სისტემა არის ლოკალურად შებრუნებადი* 0*-ში არაკლასიკური* (1.46a) *დასმით და სივრცული პარამეტრებში ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგნაირად:* $r = s - \dfrac{1}{p} > 0$.

დამტკიცება: (3.147) ტოლობის თანახმად $\boldsymbol{V}^0_{(-2,\mathbb{R})}\varphi_0 = 0$, $\boldsymbol{V}^1_{(-2,\mathbb{R})}\psi_0 = 0$ და (3.149) განტოლებათა სისტემაში განტოლება აკმაყოფილებს ფორმას

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}(t-\tau)^2\ln|t-\tau|\psi_0(\tau)d\tau = G(t), \qquad t\in\mathbb{R},\\ -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\big(\ln|t-\tau| + \frac{1}{2}\big)\varphi_0(\tau)d\tau = H(t), \qquad t\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

ორივე განტოლება გავამრავლოთ -4-ზე, პირველ განტოლებაში გამოვიყენოთ დიფერენცირება ∂_t^3 და მეორე განტოლებაში - ∂_t. მივიღებთ შემდეგს

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{\psi_0(\tau)d\tau}{\tau - t} = G(t),\\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi_0(\tau)d\tau}{\tau - t} = H(t), \quad t\in\mathbb{R}\end{cases}$$

მიღებული განტოლება ემთხვევა (1.45) სისტემას.

სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორის შებრუნებადობა გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობიდან (იხილეთ გოხბერგი კრუპნიკი, 1979; დუდუჩავა, 1984, [40, 20])

$$\mathcal{F}S_{\mathbb{R}}\varphi(\xi) = -sign\xi\varphi(\xi),$$

ვინაიდან $S_{\mathbb{R}}\varphi(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(-sign\xi)\mathcal{F}$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} S^2_{\mathbb{R}}\varphi(\xi) &= \mathcal{F}^{-1}(-sign\xi)\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(-sign\xi)\mathcal{F}\varphi(\xi)\\ &= \mathcal{F}^{-1}(-sign\xi)^2\mathcal{F}\varphi(\xi) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi(\xi) = \varphi(\xi).\end{aligned}$$

აქ

$$\mathcal{F}u(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x}u(x)dx, \quad \xi\in\mathbb{R}^n,$$

წარმოადგენს ფურიეს გარდაქმნას და

$$\mathcal{F}^{-1}v(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x}v(\xi)d\xi, \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

არის მისი შებრუნებული გარდაქმნა.

იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ (3.149) და (1.45) განტოლებათა სისტემების ექვივალენტობა 0-ში, შევნიშნოთ, რომ დიფერენციალი

$$\partial_t := \frac{d}{dt} \ : \ \mathbb{H}^r_p(\mathbb{R}) \to \mathbb{H}^{r-1}_p(\mathbb{R}), \qquad \partial_t \ : \ \widetilde{\mathbb{H}}^r_p(\mathbb{R}) \to \widetilde{\mathbb{H}}^{r-1}_p(\mathbb{R})$$

შებრუნებადია ნებისმიერ სასრულ $x \in \mathbb{R}$ წერტილში და შებრუნებული ოპერატორი არის

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(\tau)d\tau.$$

□

თეორემა 1.18-ის დამტკიცება: 1.17 თეორემის თანახმად (1.42) სისტემა არის ფრედჰოლმის ბესელის პოტენციალთა (1.43) სივრცეში, თუ (1.38) სასაზღვრო ამოცანა არის ფრედჰოლმის არაკლასიკური (1.40) დასმით. მეორეს მხრივ, ლემა 3.45-ის თანამხად (1.38) სასაზღვრო ამოცანა არის ფრედჰოლმის არაკლასიკური (1.40) დასმით, თუ (3.143) სასაზღვრო ამოცანა არის ლოკალურად შებრუნებადი 0-ში არაკლასიკური (3.144) დასმით. და, საბოლოოდ, ლემა 3.46-ისა და ლემა 3.47-ს თანახმად (3.143) სასაზღვრო ამოცანა არის ლოკალურად შებრუნებადი არაკლასიკური (3.144) დასმით, თუ (1.45) სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემა არის ლოკალურად შებრუნებადი 0-ში ბესელის პოტენციალთა (1.46b) სივრცეშო. ეს ასრულებს დებულების დამტკიცებას და მოიცავს ამოხსნადობას ბესელის პოტენციალთა (1.43) და (1.46b) სივრცეებში. □

4 ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის კუთხოვან $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ არეში

4.1. სასაზღვრო ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორები

ვთქვათ, $\mathcal{H}_k(x)$ არის ჰელმჰოლცის განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნი

$$\Delta\mathcal{H}_k(x) + k^2\mathcal{H}_k(x) = \delta(x), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \tag{4.151}$$

რომელიც ემთხვევა 0 რიგის პირველი ტიპის ჰენკელის ფუნქციას $\mathcal{H}_k(x) = \dfrac{1}{4}H_0^{(1)}(k|x|)$. ჰენკელის ფუნქცია უსასრულობაში ქრება და გააჩნია შემდეგი ასიმპტოტური ყოფაქცევა (იხილეთ გრადშტეინი & რიჟიკი, 1994; კრუტიცკი, 1998, [42, 50]):

$$H_0^{(1)}(|z|) = \frac{2}{\pi}\ln|z| + \text{const} + \mathcal{O}(|z|^2)\ln|z|) \quad \text{როცა} \quad |z| \to 0. \tag{4.152}$$

მნიშვნელოვანია შევნიშნოთ, რომ ასიმპტოტის (4.152) განტოლება ძალაში რჩება ნებისმიერი სასრული რაოდენობის გაწარმოების შემდეგ.

მოდელურ Ω_α არეში განვიხილოთ სტანდარტული ფენოვანი პოტენციალური ოპერატორები: ნიუტონის, მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალები შესაბამისად

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_{\Delta+k^2}\varphi(x) &:= \int_{\Omega_\alpha} \mathcal{H}_k(x-y)\varphi(y)\,dy,\\
\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2}\varphi(x) &:= \int_{\Gamma_\alpha} \mathcal{H}_k(x-\tau)\varphi(\tau)d\sigma,\\
\boldsymbol{W}_{\Delta+k^2}\varphi(x) &:= \int_{\Gamma_\alpha} \partial_{\boldsymbol{\nu}(\tau)}\mathcal{H}_k(x-\tau)\varphi(\tau)d\sigma, \qquad x \in \Omega_\alpha.
\end{aligned} \tag{4.153}$$

ზემოთ განმარტებულ პოტენციალურ ოპერატორებს აქვთ სტანდარტული შემოსაზღვრულობის თვისებები ბესელის პოტენციალთა სივრცეებში (მაგ. იხილეთ დუდუჩავა, 1995, 2001, [33, 22]):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_{\Delta+k^2} &: \mathbb{H}_p^s(\Omega_\alpha) \longrightarrow \mathbb{H}_p^{s+2}(\Omega_\alpha), \qquad s \in \mathbb{R}, \quad 1<p<\infty,\\
\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2} &: \mathbb{H}_p^r(\Gamma_\alpha) \longrightarrow \mathbb{H}_p^{r+1+\frac{1}{p}}(\Omega_\alpha),\\
\boldsymbol{W}_{\Delta+k^2} &: \mathbb{H}_p^r(\Gamma_\alpha) \longrightarrow \mathbb{H}_p^{r+\frac{1}{p}}(\Omega_\alpha), \qquad \frac{1}{p}-2<r<\frac{1}{p}+1, \quad 1<p<\infty.
\end{aligned} \tag{4.154}$$

მართლაც, პოტენციალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობის შესახებ (დუდუჩავა, 2001, [22, თეორემა 3,2]) თეორემა მოქმედებს არა-კომპაქტური საზღვრის მქონე არეების შემთხვევაშიც. ამ მტიკების შესამოწმებლად საკმარისია გავაანალიზოთ თეორემა 3.2-ის დამტკიცება, რომელიც მოცემულია რ. დუდუჩავას [22, § 5.3] ამავე სტატიაში და გამოვიყენოთ ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობის თვისება, რომელიც წარმოიშობა მარცინკევიჩ-მიხლინ-ჰერმანდერის თეორემის მტკიცების დროს (იხილეთ დუდუჩავა, 2001, [22, Theorem 4.1]).

დუდუჩავას 1995, 2001, [33] და [22, თავი 3] სტატიებში მოცემულია (1.54) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულა. დავამტკიცოთ ეს ფორმულა, რადგან ძირითადად ვიყენებთ შემოუსაზღვრელი არისათვის.

ლემა 4.1. (1.54) *სასაზღვრო ამოცანის ნებისმიერი $u \in \mathbb{H}^1(\Omega_\alpha)$ ამონახსნი წარმოიდგინება შემდეგი ფორმულით*

$$u(x) = \boldsymbol{N}_{\Delta+k^2} f(x) + \boldsymbol{W}_{\Delta+k^2} u^+(x) - \boldsymbol{V}_{\Delta+k^2}[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^+(x) \qquad x \in \Omega_\alpha, \tag{4.155}$$

სადაც სიმკვრივეები წარმოადგენენ u ამონახსნის დირიხლეს u^+ და ნეიმანის $[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]^+$ კვალებს საზღვარზე.

დამტკიცება: განვიხილოთ $v_\varepsilon(x) := \chi_\varepsilon(x)\mathcal{H}_k(x)$ ფუნქცია, სადაც $\chi_\varepsilon(x) := \chi(\varepsilon^{-1}|x|)$, $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ არის გლუვი ჩამოჭრის ფუნქცია $\chi(t) = 1$ და $\chi(\tau) = 0$ $|t| > 1$ და $|\tau| < 1/2$-თვის, შესაბამისად. გრინის ფრომულაში $v(y) := v_\varepsilon(x-y)$-ს ჩასმით მივიღებთ

$$\int\limits_{\Omega_\alpha} \left[(\Delta + k^2)u\overline{v} - u\overline{(\Delta+k^2)v}\right] dy = \oint\limits_{\Gamma_\alpha} \left[(\partial_\nu u)^+ \overline{v^+} - u^+ \overline{(\partial_\nu v)^+}\right] d\sigma, \tag{4.156}$$

ავიღოთ სასაზღვრო ამოცანის $u \in \mathbb{H}^1(\Omega_\alpha)$ ამონახსნი

$$(\Delta + k^2)u = f, \qquad f \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}_0(\Omega_\alpha), \quad u^+ \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_\alpha), \quad (\partial_\nu u)^+ \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_\alpha)$$

(იხ. თეორემა 1.20 ამონახსნის არსებობის შესახებ) და მივასწრაფოთ $\varepsilon \to 0$, მივიღებთ (4.155) ფორმულას.

მართლაც, ზღვრის არსებობა, როცა $\varepsilon \to 0$ ფორმულის (4.155) მარჯვენა ნაწილის პირველ შესაკრებში (მოცემული გვაქვს მეორე და მესამე შესაკრებები (4.155) ფორმულაში) არის $\mathcal{H}_k(x-y)$ ბირთვის სიგლუვის შედეგი, $x \in \Omega_\alpha$, $y \in \Gamma_\alpha$, და იკლებს ექსპონენციალურად როცა $y \to \infty$ და x არის ფიქსირებული.

(4.156) ტოლობის მარცხენა მხარეში პირველი შესაკრებისთვის ზღვარი არსებობს ფსევდოდიფერენციალური $\mathbf{N}_{\Delta+K^2}$: $\widetilde{\mathbb{H}}^s_0(\Omega_\alpha) \to \mathbb{H}^{s+2}_0(\Omega_\alpha)$ ოპერატორების შემოსაზღვრულობის გამო.

(4.156) ტოლობის მარცხენა მხარეში მეორე შესაკრებისთვის ვღებულობთ შემდეგს:

$$\begin{aligned}
-\int\limits_{\Omega_\alpha} u(y)\overline{(\Delta+k^2)[\chi_\varepsilon(x-y)\mathcal{H}_k(x-y)]}dy &= -\int\limits_{\Omega_\alpha} u(y)\chi_\varepsilon(x-y)\overline{((\Delta+k^2)\mathcal{H}_k)(x-y)}dy \\
-\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{D_\varepsilon(x)} u(y)&\left[\overline{\mathcal{H}_k(x-y)\partial^2_{y_j}\chi_\varepsilon(x-y)} + 2\overline{\partial_{y_j}\mathcal{H}_k(x-y)\partial_{y_j}\chi_\varepsilon(x-y)}\right] dy,
\end{aligned} \tag{4.157}$$

რადგან $\partial_{y_j}\chi_\varepsilon(x-y)$, $\partial^2_{y_j}\chi_\varepsilon(x-y)$ წარმოებულებს აქვთ სუპორტი რგოლში

$$D_\varepsilon(x) := \left\{y \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{\varepsilon}{2} < |y-x| < \varepsilon\right\}.$$

δ-ფუნქციის და პირველი შესაკრებისათვის ფუნდამენტური ამონახსნის განმარტების თანახმად ვღებულობთ

$$\int\limits_{\Omega_\alpha} u(y)\chi_\varepsilon(x-y)\overline{(\Delta+k^2)\mathcal{H}_k(x-y)}\}dy = \langle\delta(x-\cdot), u(\cdot)\chi_\varepsilon(x-\cdot)\rangle = 0, \tag{4.158}$$

ვინაიდან $\chi_\varepsilon(0)=0$.

განვიხილოთ ახალი $\chi^0_\varepsilon(x) := 1-\chi_\varepsilon(x)$, $\chi^0_\varepsilon \in C^\infty_0(\Omega_\alpha)$ ფუნქცია, რომელსაც აქვს სუპორტი წრის $C_\varepsilon(0) := \big\{x\in\mathbb{R}^2\ :\ |x|<\varepsilon\big\}$ შიგნით და განვიხილოთ მეორე შესაკრები (4.157) ტოლობაში:

$$\begin{aligned}
&-\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{D_\varepsilon(x)} u(y)\left[\overline{\mathcal{H}_k(x-y)\partial^2_{y_j}\chi_\varepsilon(x-y)} + 2\overline{\partial_{y_j}\mathcal{H}_k(x-y)\partial_{y_j}\chi_\varepsilon(x-y)}\right]dy\\
&= -\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{D_\varepsilon(x)} u(y)\left[\overline{\mathcal{H}_k(x-y)\partial^2_{y_j}\chi^0_\varepsilon(x-y)} + 2\overline{\partial_{y_j}\mathcal{H}_k(x-y)\partial_{y_j}\chi^0_\varepsilon(x-y)}\right]dy\\
&= -\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{D_\varepsilon(x)} \left[u(y)\overline{(\partial_j\mathcal{H}_k)(x-y)} + (\partial_j u)(y)\overline{\mathcal{H}_k(x-y)}\right](\partial_j\chi^0_\varepsilon)(x-y)dy\\
&= \sum_{j=1}^{2}\int\limits_{C_\varepsilon(x)} \partial_{y_j}\left[u(y)\overline{(\partial_j\mathcal{H}_k)(x-y)} + (\partial_j u)(y)\overline{\mathcal{H}_k(x-y)}\right]\chi^0_\varepsilon(x-y)dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle(\partial^2_j\mathcal{H}_k)(x-\cdot), u(\cdot)\chi^0_\varepsilon(x-\cdot)\rangle - \sum_{j=1}^{2}\int\limits_{C_\varepsilon(x)} (\partial^2_j u)(y)\overline{\mathcal{H}_k(x-y)}\chi^0_\varepsilon(x-y)dy\\
&= \langle\Delta+k^2)\mathcal{H}_k(x-\cdot), u(\cdot)\chi^0_\varepsilon(x-\cdot)\rangle - \int\limits_{C_\varepsilon(x)} \overline{\mathcal{H}_k(x-y)}(\Delta+k^2)u(y)\chi^0_\varepsilon(x-y)dy\\
&= \langle\delta(x-\cdot), u(\cdot)\chi^0_\varepsilon(x-\cdot)\rangle - \int\limits_{C_\varepsilon(x)} \overline{\mathcal{H}_k(x-y)}(\Delta+k^2)u(y)\chi^0_\varepsilon(x-y)dy\\
&= u((x) - \int\limits_{C_\varepsilon(x)} \overline{\mathcal{H}_k(x-y)}(\Delta+k^2)u(y)\chi^0_\varepsilon(x-y)dy,
\end{aligned} \tag{4.159}$$

სადაც გამოყენებული გვაქვს ნაწილობითი ინტეგრება რამდენჯერმე, ასევე გამოვიყენეთ, რომ $\operatorname{supp}\chi^0_\varepsilon = C_\varepsilon(0)$ და ფუნდამენტური ამონახსნის თვისება, როგორც (4.158)-ში გვაქვს მოცემული. მაგრამ ახლანდელ შემთხვევაში $u(y)\chi^0_\varepsilon(x-y)\big|_{y=x} = u(x)$, ვინაიდან $\chi^0_\varepsilon(0)=1$.

დასამტკიცებელი დაგვრჩა, რომ 4.159-ში მეორე შესაკრები იკრიბება 0-სკენ, როცა $\varepsilon\to 0$. ამისათვის გამოვიყენოთ, რომ u ამონახსნი არის გლუვი $u\in C^\infty(\Omega_\alpha)$ არის შიგნით, და, ამიტომ ნამრავლი $(\Delta+k^2)u(y)\chi^0_\varepsilon(x-y)$ არის შემოსაზღვრული $C_\varepsilon(x)$ წრეში, ხოლო $\mathcal{H}_k(x-y)$-ს ფასდება შემდეგით

$$|\mathcal{H}_k(x-y)| \leqslant M_1|\ln|x-y||, \qquad x\in\Omega_\alpha,\quad y\in C_\varepsilon(x) \tag{4.160}$$

ზოგიერთი $M_1 > 0$ მუდმივისთვის. თუ 4.160 უტოლობას გამოვიყენებთ 4.159 ტოლობის მეორე შესაკრებში, მივიღებთ:

$$\left| \int\limits_{C_\varepsilon(x)} \overline{\mathcal{H}_k(x-y)}(\Delta+k^2)u(y)\chi^0_\varepsilon(x-y)dy \right| \leqslant M_2 \int\limits_{C_\varepsilon(0)} |\ln|x-y||dy$$
$$= -M_2 \int_0^{2\pi} \int\limits_0^\varepsilon r\ln r dr = \frac{\pi}{2}M_2\varepsilon^2 \ln\frac{1}{\varepsilon^2} \tag{4.161}$$

და მეორე შესაკრების 0-სკენ კრებადობა, როცა $\varepsilon \to 0$, დამტკიცებულია.

(4.157)-(4.161)-დან გამომდინარეობს (4.155). □

შედეგი 4.2. (1.54) *სასაზღვრო ამოცანის* $u(x)$, $x \in \Omega_\alpha$, *ამონახსნი იკლებს ექსპონენციალურად*

$$u(x) = \mathcal{O}(e^{-\gamma|x|}) \qquad \textit{როცა} \quad |x| \to \infty \tag{4.162}$$

ზოგიერთი $\gamma > 0$ *მუდმივისთვის.*

დამტკიცება: ვიყენებთ რა (4.155) წარმოდგენის ფორმულას და ვიხსენებთ, რომ ამ სამი $\boldsymbol{N}_{\Delta+k^2}$, $\boldsymbol{W}_{\Delta+k^2}$, $\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2}$ ოპერატორის (4.152) წარმოდგენიდან ბირთვები იკლებენ ექსპონენციალურად (იხილეთ (4.152)), ჩვენ ადვილად გამოვიყვანთ (4.162) ასიმპტოტიკას. □

განვიხილოთ პლემელის ფორმულები

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{W}_{\Delta+k^2}\varphi)^\pm(t) = \pm\frac{1}{2}\varphi(t) + \boldsymbol{W}_{\Delta+k^2,0}\varphi(t),\\
&(\partial_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2}\psi)^\pm(t) = \mp\frac{1}{2}\psi(t) + \boldsymbol{W}^*_{\Delta+k^2,0}\psi(t),\\
&(\partial_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{W}_{\Delta+k^2}\psi)^\pm(t) = \boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,+1}\psi(t),\\
&(\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2}\varphi)^\pm(t) = \boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,-1}\varphi(t) \qquad t \in \Gamma_\alpha := \partial\Omega_\alpha,
\end{aligned} \tag{4.163}$$

სადაც

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,-1}\varphi(t) &:= \int_{\Gamma_\alpha} \mathcal{H}_k(t-\tau)\varphi(\tau)d\sigma,\\
\boldsymbol{W}_{\Delta+k^2,0}\varphi(t) &:= \int_{\Gamma_\alpha} \partial_{\boldsymbol{\nu}(\tau)}\mathcal{H}_k(t-\tau)\varphi(\tau)d\sigma,\\
\boldsymbol{W}^*_{\Delta+k^2,0}\varphi(t) &:= \int_{\Gamma_\alpha} \partial_{\boldsymbol{\nu}(t)}\mathcal{H}_k(t-\tau)\varphi(\tau)d\sigma,\\
\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,+1}\varphi(t) &:= \int_{\Gamma_\alpha} \partial_{\boldsymbol{\nu}(t)}\partial_{\boldsymbol{\nu}(\tau)}\mathcal{H}_k(t-\tau)\varphi(\tau)d\sigma, \qquad t \in \Gamma_\alpha
\end{aligned} \tag{4.164}$$

წარმოადგენენ -1, 0, 0 და $+1$ რიგის ფსევდოდიფერენციალურ ოპერატორებს და ასოცირდებიან ჰელმჰოლცის განტოლებისთვის ფენოვან პოტენციალებთან. (4.152) ასიმპტოტიკის თანახმად, $\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,-1}$ ოპერატორს გააჩნია სუსტად სინგულარული ბირთვი და ინტეგრალი არსებობს

ლებეგის აზრით, ხოლო $\boldsymbol{W}_{\Delta+k^2,0}$ და $\boldsymbol{W}^*_{\Delta+k^2,0}$ ოპერატორებს აქვთ -1 რიგის სინგულარული ბირთვი და ინტეგრალი არსებობს კოშის საშუალო მნიშვნელობის აზრით.

იმისათვის, რომ ავხსნათ, თუ რომელი აზრით არსებობს ჰიპერსინგულარუი ინტეგრალური ოპრატორი $\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,+1}\varphi(t)$, განვიხილოთ შემდეგი ტოლობა

$$\Delta + k^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + k^2 = \partial_{\boldsymbol{\nu}}^2 + \partial_\ell^2 + k^2, \tag{4.165}$$

სადაც $\boldsymbol{\nu}(t)$ არის ერთეულოვანი ნორმალური ვექტორული ველი, $\partial_{\boldsymbol{\nu}}$ არის ნორმალური წარმოებული (იხ. (1.49)–(1.51)),

(4.151) და (4.165)-დან გამომდინარეობს ტოლობა

$$\delta = (\Delta + k^2)\mathcal{H}_k = \partial_{\boldsymbol{\nu}}^2\mathcal{H}_k + (\partial_\ell^2 + k^2)\mathcal{H}_k,$$

რომელსაც გამოვიყენებთ შემდეგის დასამტკიცებლად:

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}(x)}\partial_{\boldsymbol{\nu}(y)}\mathcal{H}_k(x-y) = -\partial^2_{\boldsymbol{\nu}(y)}\mathcal{H}_k(x-y) = -\delta(x-y) + (\partial^2_{\ell(y)} + k^2)\mathcal{H}_k(x-y). \tag{4.166}$$

(4.166) ტოლობის თანახმად და მხები დიფერენციალური ოპერატორის ნაწილობითი ინტეგრებით (იხილეთ დუდუჩავა 2001, 2006, [22, 32])

$$\int_{\Gamma_\alpha} \partial_{\ell(\tau)}\psi(\tau)\varphi(\tau)d\sigma = -\int_{\Gamma_\alpha} \psi(\tau)\partial_{\ell(\tau)}\varphi(\tau)d\sigma, \tag{4.167}$$

ჰიპერსინგულარული ოპერატორი $\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,+1}$ წარმოიდგინება როგორც

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,+1}\varphi(t) :=& \int_{\Gamma_\alpha} \partial_{\boldsymbol{\nu}(t)}\partial_{\boldsymbol{\nu}(\tau)}\mathcal{H}_k(t-\tau)\varphi(\tau)d\sigma \\
=& -\varphi(t) + \int_{\Gamma_\alpha} (\partial^2_{\ell(\tau)} + k^2)\mathcal{H}_k(t-\tau)\varphi(\tau)d\sigma \\
=& -\varphi(t) - \int_{\Gamma_\alpha} \partial_{\ell(\tau)}\mathcal{H}_k(t-\tau)\partial_{\ell(\tau)}\varphi(\tau)d\sigma \\
&+ k^2\int_{\Gamma_\alpha} \mathcal{H}_k(t-\tau)\varphi(\tau)d\sigma, \quad t \in \Gamma_\alpha.
\end{aligned} \tag{4.168}$$

მიღებული (4.168) ტოლობის თანახმად, $\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,+1}$ ოპერატორი წარმოადგენს სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორს, რომლის ბირთვზეც მოდებულია მხები დიფერენციალური ოპერატორი $\partial_\ell\varphi$ და დამატებულია რეგულარული (კომპაქტური) ინტეგრალური ოპერატორი φ.

შემდეგი ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორები

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_{\Delta,-1}\varphi(t) &:= \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_\alpha} \ln|t-\tau|\varphi(\tau)d\sigma, \\
\boldsymbol{W}_{\Delta,0}\varphi(t) &:= \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_\alpha} \partial_{\boldsymbol{\nu}(\tau)}\ln|t-\tau|\varphi(\tau)d\sigma, \\
\boldsymbol{W}^*_{\Delta,0}\varphi(t) &:= \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_\alpha} \partial_{\boldsymbol{\nu}(t)}\ln|t-\tau|\varphi(\tau)d\sigma, \\
\boldsymbol{V}_{\Delta,+1}\varphi(t) &:= \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_\alpha} \partial_{\boldsymbol{\nu}(t)}\partial_{\boldsymbol{\nu}(\tau)}\ln|t-\tau|\varphi(\tau)d\sigma, \qquad t \in \Gamma_\alpha
\end{aligned} \tag{4.169}$$

არიან -1, 0, 0 და $+1$ რიგის, და დაკავშირებულნი არიან ლაპლასის განტოლებასთან (იხილეთ დუდუჩავა 1995, 2001; სიაო-ვენდლანდი, 2008, [33, 22, 45])

$$\Delta u(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^2,$$

რომელსაც აქვს ლოგარითმული ფუნდამენტური ამონახსნი

$$\mathcal{K}_\Delta(x) := \frac{1}{2\pi} \ln |x|, \qquad \Delta \mathcal{K}_\Delta(x) = \delta(x), \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

ზემოთ განმარტებულ ფსევდოდიფერენციალურ ოპერატორებს აქვთ სტანდარტული ასახვის თვისებები (იხილეთ დუდუჩავა, 1995, 2001; სიაო-ვენდლანდი, 2008, [33, 22, 45]):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,-1},\ \boldsymbol{V}_{\Delta,-1} \quad &: \quad \mathbb{H}^s_p(\Gamma_\alpha) \longrightarrow \mathbb{H}^{s+1}_p(\Gamma_\alpha),\\
\boldsymbol{W}_{\Delta+k^2,0},\ \boldsymbol{W}_{\Delta,0} \quad &: \quad \mathbb{H}^s_p(\Gamma_\alpha) \longrightarrow \mathbb{H}^s_p(\Gamma_\alpha),\\
\boldsymbol{W}^*_{\Delta+k^2,0},\ \boldsymbol{W}^*_{\Delta,0} \quad &: \quad \mathbb{H}^s_p(\Gamma_\alpha) \longrightarrow \mathbb{H}^s_p(\Gamma_\alpha),\\
\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,+1},\ \boldsymbol{V}_{\Delta,+1} \quad &: \quad \mathbb{H}^s_p(\Gamma_\alpha) \longrightarrow \mathbb{H}^{s-1}_p(\Gamma_\alpha)
\end{aligned} \tag{4.170}$$

$1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} - 2 < r < \dfrac{1}{p} + 1$-თვის.

ლემა 4.3 (ლემა 1.1, დიდენკო & დუდუჩავა, 2016, [18])**.** *ვთქვათ,* $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} - 2 < r < \dfrac{1}{p} + 1$ *და ან* $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_\alpha$ *ან პირიქით* $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}_\alpha$, $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}^+$. *ვთქვათ,* $r_j \ : \ \mathbb{H}^s_p(\Gamma_\alpha) \to \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}_j)$, $j = 0, 1$, *არიან შესაბამისი შეზღუდვის ოპერატორები. მაშინ შემდეგი სხვაობები*

$$\begin{aligned}
{}_1 := r_1[\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,-1} - \boldsymbol{V}_{\Delta,-1}]r_0 \quad &: \quad \widetilde{\mathbb{H}}^s_p(\mathbb{R}_0) \longrightarrow \mathbb{H}^{s+1}_p(\mathbb{R}_1),\\
{}_2 := \boldsymbol{W}_{\Delta+k^2,0} - \boldsymbol{W}_{\Delta,0} \quad &: \quad \mathbb{H}^s_p(\Gamma_\alpha) \longrightarrow \mathbb{H}^s_p(\Gamma_\alpha),\\
{}_3 =^*_2 := \boldsymbol{W}^*_{\Delta+k^2,0} - \boldsymbol{W}^*_{\Delta,0} \quad &: \quad \mathbb{H}^s_p(\Gamma_\alpha) \longrightarrow \mathbb{H}^s_p(\Gamma_\alpha),\\
{}_4 := r_1[\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,+1} - \boldsymbol{V}_{\Delta,+1}]r_0 \quad &: \quad \widetilde{\mathbb{H}}^{s+1}_p(\mathbb{R}_0) \longrightarrow \mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}_1)
\end{aligned} \tag{4.171}$$

არიან ლოკალურად კომპაქტური ოპერატორები: v_j, $j = 1, 2, 3, 4$ *ოპერატორები არიან კომპაქტური ნებისმიერი* $v \in C^\infty_0(\Gamma_\alpha)$ *ფუნქციისთვის კომპაქტური სუპორტით.*

განვიხილოთ $r_{\mathbb{R}^+}\boldsymbol{V}_{\Delta,+1}r_{\mathbb{R}_\alpha}$ ფსევოდიფერენციალური ოპერატორი. შემდეგი ტოლობის გამოყენებით

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}(x)}\partial_{\boldsymbol{\nu}(y)} \ln|x-y| = -\partial^2_{\boldsymbol{\nu}(y)} \ln|x-y| = -\delta(x-y) + \partial^2_{\ell(y)} \ln|x-y|,$$

და (4.168)-ის დამტკიცების ანალოგიურად, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_{\Delta,+1}\varphi(t) := \int_{\Gamma_\alpha} \partial_{\boldsymbol{\nu}(t)}\partial_{\boldsymbol{\nu}(\tau)} \ln|t-\tau|\varphi(\tau)d\sigma &= -\varphi(t) + \int_{\Gamma_\alpha} \partial^2_{\ell(\tau)} \ln|t-\tau|\varphi(\tau)d\sigma\\
&= -\varphi(t) - \int_{\Gamma_\alpha} \partial_{\ell(\tau)} \ln|t-\tau|\partial_{\ell(\tau)}\varphi(\tau)d\sigma, \quad t \in \Gamma_\alpha.
\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^+$,-ის პარამეტრიზაციის $x = (x_1, x_2)^\top = (t, 0)^\top$ და $\mathbb{R}_\alpha$-ს პარამეტრიზაციის $y = (y_1, y_2)^\top = (\tau\cos\alpha, \tau\sin\alpha)^\top$ გამოყენებით, გათვალისწინებით, რომ $\mathbb{R}_\alpha$ ორიენტირებულია $-\infty$-დან 0-სკენ და (1.51) ტოლობის და შემდეგი ტოლობების გამოყენებით

$$\partial_{\ell(y)} = -\cos\alpha\,\partial_{y_1} - \sin\alpha\,\partial_{y_2}, \quad \ln|x-y| = \frac{1}{2}\ln\left[(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2\right] \tag{4.172}$$

$t \in \mathbb{R}^+$, $y \in \Gamma_\alpha$-თვის, მივიღებთ შემდეგს:

$$\begin{aligned}
\partial_{\boldsymbol{\nu}(t)}\partial_{\boldsymbol{\nu}(y)}\mathcal{K}_\Delta(t-y) &= \partial_{\boldsymbol{\nu}(x)}\partial_{\boldsymbol{\nu}(y)}\mathcal{K}_\Delta(x-y)\Big|_{\substack{x=(t,0)\\ y=(\tau\cos\alpha,\tau\sin\alpha)}}\\
&= -\partial_{x_2}(-\sin\alpha\,\partial_{y_1} + \cos\alpha\,\partial_{y_2})\mathcal{K}_\Delta(x-y)\Big|_{\substack{x=(t,0)\\ y=(\tau\cos\alpha,\tau\sin\alpha)}}\\
&= \left\{-\sin\alpha\,\partial_{y_1}\partial_{y_2} + \cos\alpha\,\partial^2_{y_2}\right\}\mathcal{K}_\Delta(x-y)\Big|_{\substack{x=(t,0)\\ y=(\tau\cos\alpha,\tau\sin\alpha)}}\\
&= \left[\cos\alpha\Delta\mathcal{K}_\Delta(x-y) - \partial_{y_1}\left\{\cos\alpha\,\partial_{y_1} + \sin\alpha\,\partial_{y_2}\right\}\mathcal{K}_\Delta(x-y)\right]\Big|_{\substack{x=(t,0)\\ y=(\tau\cos\alpha,\tau\sin\alpha)}}\\
&= \left[\cos\alpha\delta(x-y) + \partial_{y_1}\partial_{\ell(y)}\mathcal{K}_\Delta(x-y)\right]\Big|_{\substack{x=(t,0)\\ y=(\tau\cos\alpha,\tau\sin\alpha)}}\\
&= \left[\cos\alpha\,\delta(0) + \frac{1}{4\pi}\partial_{\ell(y)}\partial_{y_1}\ln\left[(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2\right]\right]\Big|_{\substack{x=(t,0)\\ y=(\tau\cos\alpha,\tau\sin\alpha)}}\\
&= \left[\cos\alpha\,\delta(0) - \frac{1}{2\pi}\partial_{\ell(y)}\frac{x_1-y_1}{2\pi[(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2]}\right]\Big|_{\substack{x=(t,0)\\ y=(\tau\cos\alpha,\tau\sin\alpha)}}
\end{aligned}$$

ნაწილობითი ინტეგრებით (იხილეთ (4.167)) გავაგრძელებთ შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}
r_{\mathbb{R}^+}\boldsymbol{V}_{\Delta,+1}r_{\mathbb{R}_\alpha}v(t) &= \frac{1}{2\pi}r_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}_\alpha}\frac{(x_1-y_1)\partial_{\ell(y)}v(y)d\sigma}{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}\Big|_{\substack{x=(t,0)\\ y=(\tau\cos\alpha,\tau\sin\alpha)}}\\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{t-\tau\cos\alpha}{t^2+\tau^2-2t\tau\,\cos\alpha}(\boldsymbol{J}_\alpha\partial_\ell v)(\tau)d\tau\\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\left[\frac{1}{t-e^{i\alpha}\tau} + \frac{1}{t-e^{-i\alpha}\tau}\right](\boldsymbol{J}_\alpha\partial_\ell v)(\tau)d\tau,\\
&= \frac{1}{4}\left[\boldsymbol{K}_{e^{i\alpha}} + \boldsymbol{K}_{e^{-i\alpha}}\right]\partial_\tau v_1(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+,
\end{aligned} \tag{4.173}$$

ვინაიდან $(\boldsymbol{J}_\alpha\partial_\ell v)(\tau) = -(\partial_\tau v_1)(\tau)$, სადაც $v_1 := \boldsymbol{J}_\alpha v$. $\boldsymbol{K}_c$ არის მელინის კონვოლუციის ოპერატორი (იხ. [25, 20, 27, 26]):

$$\mathbf{K}^1_c\phi(t) := \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\phi(\tau)\,d\tau}{t-c\,\tau}, \qquad 0 < \arg\,c < 2\pi, \quad \phi \in \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^+). \tag{4.174}$$

ფორმულა

$$\boldsymbol{J}_\alpha r_{\mathbb{R}_\alpha}\boldsymbol{V}_{\Delta,+1}r_{\mathbb{R}^+}w(t)=-\frac{1}{4}\left[\boldsymbol{K}_{e^{i\alpha}}+\boldsymbol{K}_{e^{-i\alpha}}\right](\partial_\tau w)(t),\quad t\in\mathbb{R}^+ \tag{4.175}$$

მტკიცდება ანალოგიურად.

ახლა ვიპოვოთ $r_{\mathbb{R}_\alpha}\partial_\ell\boldsymbol{V}_{\Delta,-1}r_{\mathbb{R}^+}$ და $r_{\mathbb{R}^+}\partial_\ell\boldsymbol{V}_{\Delta,-1}r_{\mathbb{R}_\alpha}$ სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორები. გავაგრძელებთ, როგორც (4.173)-ში:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}_\alpha r_{\mathbb{R}_\alpha}\partial_\ell\boldsymbol{V}_{\Delta,-1}r_{\mathbb{R}^+}w(t)&=\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{J}_\alpha r_{\mathbb{R}_\alpha}\int_{\mathbb{R}^+}\partial_{\ell(x)}\ln|x-y|\,w(y)d\sigma\Big|_{\substack{x=(t\cos\,\alpha,t\sin\,\alpha))\\ y=(\tau,0)}}\\
&=-\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{J}_\alpha r_{\mathbb{R}_\alpha}\int_{\mathbb{R}^+}\frac{\cos\,\alpha(x_1-\tau)+x_2\sin\,\alpha}{(x_1-\tau)^2+x_2^2}w(\tau)\,d\tau\Big|_{x=(t\cos\,\alpha,t\sin\,\alpha)}\\
&=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\,\alpha(t\cos\,\alpha-\tau)+t\,\sin^2\alpha}{(t\,\cos\alpha-\tau)^2+t\sin^2\alpha}w(\tau)d\tau\\
&=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{t-\tau\,\cos\alpha}{(t\,\cos\alpha-\tau)^2+t^2\sin^2\alpha}w(\tau)d\tau\\
&=-\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\left[\frac{1}{t-e^{i\alpha}\tau}+\frac{1}{t-e^{-i\alpha}\tau}\right]w(\tau)d\tau,\\
&=-\frac{1}{4}\left[\boldsymbol{K}_{e^{i\alpha}}+\boldsymbol{K}_{e^{-i\alpha}}\right]w(t),\quad t\in\mathbb{R}^+.
\end{aligned}\tag{4.176}$$

ფორმულა

$$r_{\mathbb{R}^+}\partial_\ell\boldsymbol{V}_{\Delta,-1}r_{\mathbb{R}_\alpha}w(t)=\frac{1}{4}\left[\boldsymbol{K}_{e^{i\alpha}}+\boldsymbol{K}_{e^{-i\alpha}}\right]\boldsymbol{J}_\alpha w(\tau),\quad t\in\mathbb{R}^+ \tag{4.177}$$

მტკიცდება ანალოგიურად.

$\boldsymbol{W}_{\Delta,0}$ სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორისთვის დავამტკიცეთ შემდეგი:

$$r_{\mathbb{R}^+}\boldsymbol{W}_{\Delta,0}r_{\mathbb{R}_\alpha}\varphi(t)=-\boldsymbol{J}_\alpha r_{\mathbb{R}_\alpha}\boldsymbol{W}_{\Delta,0}r_{\mathbb{R}^+}\varphi(t)=\frac{1}{4i}\left[e^{i\alpha}\boldsymbol{K}_{e^{i\alpha}}-e^{-i\alpha}\boldsymbol{K}_{e^{-i\alpha}}\right]\varphi_1(t), \tag{4.178}$$

$$r_{\mathbb{R}^+}\boldsymbol{W}_{\Delta+k^2}r_{\mathbb{R}^+}=r_{\mathbb{R}^+}\boldsymbol{W}_\Delta r_{\mathbb{R}^+}=r_{\mathbb{R}_\alpha}\boldsymbol{W}_{\Delta+k^2}r_{\mathbb{R}_\alpha}=r_{\mathbb{R}_\alpha}\boldsymbol{W}_\Delta r_{\mathbb{R}_\alpha}=0, \tag{4.179}$$

$$\varphi_1(t):=(\boldsymbol{J}_\alpha\varphi)(t),\qquad t\in\mathbb{R}^+,$$

სადაც $\boldsymbol{J}_\alpha$ არის "უკან დაბრუნების ("pull back") ოპერატორი (იხ. (1.58)) და $r_{\mathbb{R}^+}$ და $r_{\mathbb{R}_\alpha}$ არიან შეზღუდვის ოპერატორები სივრცის შესაბამის $\mathbb{R}^+$ და $\mathbb{R}_\alpha$ ქვესიმრავლეებზე.

დუალური $\boldsymbol{W}^*_{\Delta,0}$ ოპერატორისთვის ვღებულობთ:

$$r_{\mathbb{R}_\alpha}\boldsymbol{W}^*_{\Delta,0}r_{\mathbb{R}^+}\varphi(t)=-\boldsymbol{J}_\alpha r_{\mathbb{R}^+}\boldsymbol{W}^*_{\Delta,0}r_{\mathbb{R}^+}\varphi(t)=\frac{1}{4i}\left[\boldsymbol{K}_{e^{i\alpha}}-\boldsymbol{K}_{e^{-i\alpha}}\right]\varphi(t),\quad t\in\mathbb{R}^+, \tag{4.180}$$

$$r_{\mathbb{R}^+}\boldsymbol{W}^*_{\Delta+k^2}r_{\mathbb{R}^+}=r_{\mathbb{R}^+}\boldsymbol{W}^*_\Delta r_{\mathbb{R}^+}=r_{\mathbb{R}_\alpha}\boldsymbol{W}^*_{\Delta+k^2}r_{\mathbb{R}_\alpha}=r_{\mathbb{R}_\alpha}\boldsymbol{W}^*_\Delta r_{\mathbb{R}_\alpha}=0. \tag{4.181}$$

4.2. სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლება მოდელური ამოცანისთვის

თეორემის 1.24 დამტკიცება: (1.54) სასაზღვრო ამოცანისათვის $g \in \mathbb{W}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}_\alpha)$ და $h \in \mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}^+)$ სასაზღვრო პირობები არაკლასიკური (1.56) ფორმულირებით არიან განმარტებულნი საზღვრის $\mathbb{R}_\alpha$ და $\mathbb{R}^+$ ნაწილზე, შესაბამისად. ვთქვათ $g_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1/p}(\Gamma_\alpha)$ და $h_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\Gamma_\alpha)$ წარმოადგენენ მოცემული სასაზღვრო პირობების რაიმე ფიქსირებულ გაგრძელებებს მთლიან საზღვარზე $\Gamma_\alpha = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}_\alpha$. გავიხსენოთ, რომ $\widetilde{\mathbb{W}}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}_\alpha)$ და $\widetilde{\mathbb{W}}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^+)$ სივრცეები არიან $\mathbb{W}_p^{s-1/p}(\Gamma_\alpha)$ სივრცის ქვესიმრავლეები და ფუნქციები $\widetilde{\mathbb{W}}_p^{s}(\mathbb{R}^+)$ და $\widetilde{\mathbb{W}}_p^{s}(\mathbb{R}_\alpha)$ სივრცეებიდან გაგრძელებულია 0-ით $\mathbb{R}_\alpha$ და to $\mathbb{R}^+$-მდე, შესაბამისად. სხვაობა ასეთ ორ გაგრძელებას შორის ეკუთვნის $\widetilde{\mathbb{W}}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}_\alpha)$ და $\widetilde{\mathbb{W}}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}^+)$ სივრცეებს შესაბამისად. ამიტომ ჩვენ უნდა ვეძებოთ ისეთი ორი უცნობი $\varphi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^+)$ და $\psi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}_\alpha)$ ფუნქცია, რომ $g_0 + \varphi_0$ და $h_0 + \psi_0$-თვის (1.54) ამოცანის სასაზღვრო პირობები სრულდებოდეს მთელ საზღვარზე, ე.ი.(1.54) სასაზღვრო ამოცანის ნებისმიერი $u(x)$ ამონახსნითვის , სრულდება

$$u^+(t) = g_0(t) + \varphi_0(t) = \begin{cases} g_0(t) + \varphi(t) & \text{if} \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ g_0(t) & \text{if} \quad t \in \mathbb{R}_\alpha, \end{cases}$$
$$(\partial_{\boldsymbol{\nu}} u)^+(t) = h_0(t) + \psi_0(t) = \begin{cases} h_0(t) & \text{if} \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ h(t) + \psi_0(t) & \text{if} \quad t \in \mathbb{R}_\alpha. \end{cases} \tag{4.182}$$

(1.54) სასაზღვრო ამოცანის (4.182) ამონახსნის სასაზღვრო პირობების ჩასმით (4.155) წარმოდგენის ფორმულაში, მივიღებთ ამონახსნის შემდეგ წარმოდგენის ფორმულას:

$$u(x) = \boldsymbol{N}_{\Delta+k^2} f(x) + \boldsymbol{W}_{\Delta+k^2}[g_0 + \varphi_0](x) - \boldsymbol{V}_{\Delta+k^2}[h_0 + \psi_0](x), \qquad x \in \mathcal{C}. \tag{4.183}$$

(4.182) და (4.183)-ში მოცემული ცნობილი და უცნობი ფუნქციები ეკუთვნიან შემდეგ სივრცეებს

$$g_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1/p}(\Gamma_\alpha), \quad h_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\Gamma_\alpha), \quad \varphi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^+), \quad \psi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}_\alpha). \tag{4.184}$$

თუ (1.54)-დან სასაზღვრო პირობებს გამოვიყენებთ (4.183)-ში და ასევე პლემელის (4.163) ფორმულებს, მივიღებთ შემდეგს:

$$\begin{cases} g_0(t) + \varphi_0(t) = u^+(t) = (\boldsymbol{N}_{\Delta+k^2} f)^+ + \dfrac{1}{2}(g_0(t) + \varphi_0(t)) \\ \qquad + \boldsymbol{W}_{\Delta+k^2,0}[g_0 + \varphi_0](t) - \boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,-1}[h_0 + \psi_0](t), \\ h_0(t) + \psi_0(t) = (\partial_{\boldsymbol{\nu}} u)^+(t) = (\partial_{\boldsymbol{\nu}} \boldsymbol{N}_{\Delta+k^2} f)^+ + \boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,+1}[g_0 + \varphi_0](t) \\ \qquad + \dfrac{1}{2}(h_0(t) + \psi_0(t)) - \boldsymbol{W}^*_{\Delta+k^2,0}[h_0 + \psi_0](t), \qquad t \in \Gamma_\alpha. \end{cases} \tag{4.185}$$

ცნობილი და უცნობი ფუნქციების დალაგების შემდეგ სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\varphi_0 - \boldsymbol{W}_{\Delta+k^2,0}\varphi_0 + \boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,-1}\psi_0 = G_0, \\ \frac{1}{2}\psi_0 + \boldsymbol{W}^*_{\Delta+k^2,0}\psi_0 - \boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,+1}\varphi_0 = H_0 \quad \Gamma_\alpha- \qquad \text{ზე}, \end{cases} \tag{4.186}$$

სადაც G_0 და H_0 არიან მოცეულნი (1.65)-ში. თუ პირველი განტოლება $r_{\mathbb{R}^+}$-ით შეზღუდულია $\mathbb{R}^+$-ზე, ხოლო მეორე განტოლება $r_{\mathbb{R}_\alpha}$-ით შეზღუდულია $\mathbb{R}_\alpha$-ზე, შემდეგი თვისებების $\varphi_0 = r_{\mathbb{R}^+}\varphi_0$, $\psi_0 = r_{\mathbb{R}_\alpha}\psi_0$ და ტოლობების $r_{\mathbb{R}^+}\boldsymbol{W}_{\Delta+k^2}r_{\mathbb{R}^+} = r_{\mathbb{R}_\alpha}\boldsymbol{W}^*_{\Delta+k^2}r_{\mathbb{R}_\alpha} = 0$ გამოყენებით (იხ. (4.178), (4.180)), მივიღებთ (1.65) სისტემას.

პირიქით: ვთქვათ $\varphi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}^{s-1/p}_p(\mathbb{R}^+)$ და $\psi_0 \in \widetilde{\mathbb{W}}^{s-1-1/p}_p(\mathbb{R}_\alpha)$ არიან (4.185) სისტემის ამონახსნები. (4.183) წარმოდგენის ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ, რომ $u(x)$ აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას (1.54) სასაზღვრო ამოცანაში:

$$(\Delta+k^2)u(x) = (\Delta+k^2)[\boldsymbol{N}_{\Delta+k^2}f(x) + \boldsymbol{W}_{\Delta+k^2}[g_0+\varphi_0](x) - \boldsymbol{V}_{\Delta+k^2}[h_0+\psi_0](x)] = f(x)$$

$x \in \Omega$-თვის, რადგან $(\Delta+k^2)\boldsymbol{N}_{\Delta+k^2}f(x) = f(x)$, $(\Delta+k^2)\boldsymbol{W}_{\Delta+k^2}[g_0+\varphi_0](x) = 0$ და $(\Delta+k^2)\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2}[h_0+\psi_0](x) = 0$. შევნიშნოთ, რომ (1.65) ტოლობიდან გამომდინარეობს (4.186) ტოლობა მთლიან Γ_α-ზე, რადგან (1.54) სასაზღვრო ამოცანას ქრობადი პირობებით $f = 0$, $g = 0$ და $h = 0$ აქვს ნულოვანი ამონახსნი (ერთადერთობის თეორემა).თუ გვაქვს (4.186) ტოლობა, შეიძლება გადავწეროთ, როგორც (4.185) ტოლობა და ავიღოთ $u^+(t)$ კვალი $\mathbb{R}^+$-ზე და $(\partial_{\boldsymbol{\nu}}u)^+(t)$ კვალი $\mathbb{R}_\alpha$-ზე, (4.185) ტოლობის თანახმად გავარკვევთ, რომ $u^+(t) = g(t)$ $t \in \mathbb{R}^+$-თვის და $(\partial_{\boldsymbol{\nu}}u)^+(t) = h(t)$ სასაზღვრო პირობები $t \in \mathbb{R}_\alpha$-თვის (1.54) სასაზღვრო ამოცანაში ასევე სრულდება.

ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ სრული ექვივალენტურობა (4.186) სისტემისა და (1.54) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობას შორის (4.183) წარმოდგენის ფორმულის გამოყენებით.

ამიტომ, (1.54) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობიდან გამომდინარეობს სისტემის (4.186) ამონახსნის ერთადერთობა და პირიქით.

თეორემის 1.24 დასკვნითი დებულება გამომდინარეობს თეორემიდან 1.21. □

შემდეგი ლემის 4.4 ჩამოსაყალიბებლად და დასამტკიცებლად ვიყენებთ ლოკალიზაციის პრინციპს (ლოკალურ კვაზი-ექვივალენტობას, ლოკალურ შებრუნებადობას და ა.შ.). როგორც ვიცით, ლოკალიზაცია გულისხმობს "კოეფიციენტის გაყინვას"და A ოპერატორის ლოკალური შებრუნებადობა $x \in \mathcal{C}$ გულისხმობს ამ წერტილის მიდამოში შებრუნებადობას: $ABv_xI = v_xI$, $v_xBAI = v_xI$ ზოგიერთი B ოპერატორისთვის და გლუვი ფუნქციისთვის, რომლის სუპორტიც მდებარეობს x-ის მიდამოში.

შევთანხმდეთ, რომ განტოლების ლოკალური ექვივალენტობის ქვეშ გვესმის შესაბამისი ოპერატორის ლოკალური ექვივალენტობა შესაბამის სივრცეებში.

(1.65) სისტემა გადავწეროთ ექვივალენტური ფორმით

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\varphi_+(t) + r_{\mathbb{R}^+}\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,-1}r_{\mathbb{R}_\alpha}\boldsymbol{J}_\alpha^{-1}\psi_+(t) = G_+(t), \\ \dfrac{1}{2}\psi_+(t) - \boldsymbol{J}_\alpha r_{\mathbb{R}_\alpha}\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,+1}r_{\mathbb{R}^+}\varphi_+(t) = H_+(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+, \end{array}\right. \tag{4.187}$$

$$\varphi_+ \in \widetilde{\mathbb{W}}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^+), \qquad \psi_+ := \boldsymbol{J}_\alpha\psi_- \in \widetilde{\mathbb{W}}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}^+),$$

$$G_+ := G_1 \in \mathbb{W}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^+), \qquad H_+ := \boldsymbol{J}_\alpha H_1 \in \mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}^+),$$

სადაც, $\boldsymbol{J}_\alpha$ არის "უკან დაბრუნების"("pull back") ოპერატორი $\mathbb{R}_\alpha$-დან $\mathbb{R}^+$-ში (იხილეთ (1.58)) და $\boldsymbol{J}_\alpha^{-1}$ არის მისი შებრუნებული.

ლემა 4.4. (1.65) *ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა და შემდეგი სისტემა*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\varphi_+(t) + r_{\mathbb{R}^+}\boldsymbol{V}_{\Delta,-1}r_{\mathbb{R}_\alpha}\boldsymbol{J}_\alpha^{-1}\psi_+(t) = G_+(t), \\ \dfrac{1}{2}\psi_+(t) - \boldsymbol{J}_\alpha r_{\mathbb{R}_\alpha}\boldsymbol{V}_{\Delta,+1}r_{\mathbb{R}^+}\varphi_+(t) = H_+(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+, \end{array}\right. \tag{4.188}$$

$$\varphi_+,\ \psi_+ \in \widetilde{\mathbb{W}}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}^+), \qquad G_+,\ H_+ \in \mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}^+),$$

არიან ლოკალურად ექვივალენტურები 0*-ში.*

სხვა $x \in \overline{\mathbb{R}^+} := \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ *წერტილში, უსასრულობის* $+\infty$ *ჩათვლით (და ნულის* $x \neq 0$ *გამოკლებით),* (1.65) *სისტემა ლოალურად ექვივალენტურია შემდეგი ტრივიალური სისტემის*

$$\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\varphi^0 = H^0, \\ \dfrac{1}{2}\psi^0 = G^0, \quad \varphi^0,\ \psi^0,\ G^0,\ H^0 \in \mathbb{W}_p^{s-1/p-1}(\mathbb{R}^+) \qquad \textit{on} \quad \mathbb{R}^+. \end{array} \tag{4.189}$$

დამტკიცება: (1.65) და (4.188) სისტემები არიან ლოკალურად ექვივალენტურები 0-ში ვინაიდან სხვაობები

$$_1 := r_{\mathbb{R}^+}[\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,-1} - \boldsymbol{V}_{\Delta,-1}]r_{\mathbb{R}_\alpha}\boldsymbol{J}_\alpha^{-1} \quad : \quad \widetilde{\mathbb{W}}_p^r(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{W}_p^{r+1}(\mathbb{R}^+),$$

$$_2 := \boldsymbol{J}_\alpha^{-1}r_{\mathbb{R}_\alpha}[\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,+1} - \boldsymbol{V}_{\Delta,+1}]r_{\mathbb{R}^+} \quad : \quad \widetilde{\mathbb{W}}_p^{r+1}(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{W}_p^r(\mathbb{R}^+)$$

ლოკალურად ექვივალენტურებია ყველა $r \in \mathbb{R}$-თვის ლემის 4.3 ძალით და კომპაქტური ოპერატორები ლოკალურად ექვივალენტურია 0-ში.

აღვწეროლთ (1.65)-ის ექვივალენტური სისტემა $x \in \mathbb{R}^+$ წერტილში, $x \neq 0, +\infty$. ოპერატორები

$$v_x r_{\mathbb{R}^+}\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,-1}r_{\mathbb{R}_\alpha}\boldsymbol{J}_\alpha^{-1} \quad : \quad \widetilde{\mathbb{W}}_p^r(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{W}_p^{r+1}(\mathbb{R}^+),$$

$$v_x\boldsymbol{J}_\alpha^{-1}r_{\mathbb{R}_\alpha}\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,+1}r_{\mathbb{R}^+} \quad : \quad \widetilde{\mathbb{W}}_p^{r+1}(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{W}_p^r(\mathbb{R}^+)$$

არიან კომპაქტურები ყველა $v_x \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$-თვის, $0 \notin \operatorname{supp} v_x$. კომპაქტური ოპერატორები, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ლოკალურად კვაზი-ექვივალენტურებია 0-ში. ოპერატორი $\dfrac{1}{2}I$, სადაც

I არის ერთეულოვანი, ლოკალურად ექვივალენტურია თავისი თავის და ვღებულობთ ექვივალენტურ სისტემას (4.189).

რაც შეეხება ლოკალურად ექვივალენტურ (4.188) სისტემას უსასრულობაში $x = +\infty$: მალოკალიზებელი $v_\infty \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ ფუნქციის სუპორტი არის ∞ უსასრულობის მიდამოში . $r_{\mathbb{R}^+}\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,-1}$ ოპერატორის გამოყენებით დაგვრჩება მხოლოდ კომპაქტური $_3$, $_4$ შესაკრებები

$$v_\infty r_{\mathbb{R}^+}\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,-1}r_{\mathbb{R}_\alpha}\boldsymbol{J}_\alpha^{-1} = r_{\mathbb{R}^+}\boldsymbol{W}^*_{\Delta,0}v_\infty r_{\mathbb{R}_\alpha}\boldsymbol{J}_\alpha^{-1} +_3 =_3,$$

$$\boldsymbol{J}_\alpha^{-1}r_{\mathbb{R}_\alpha}\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,+1}r_{\mathbb{R}^+}v_\infty I = \boldsymbol{J}_\alpha^{-1}r_{\mathbb{R}_\alpha}v_\infty\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,+1}r_{\mathbb{R}^+} +_4 =_4,$$

$$r_{\mathbb{R}^+}\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,-1}r_{\mathbb{R}_\alpha}\boldsymbol{J}_\alpha^{-1}v_\infty I = 0, \qquad v_\infty\boldsymbol{J}_\alpha^{-1}r_{\mathbb{R}_\alpha}\boldsymbol{V}_{\Delta+k^2,+1}r_{\mathbb{R}^+} = 0,$$

რადგან $v_\infty r_{\mathbb{R}_\alpha} = r_{\mathbb{R}_\alpha}v_\infty = 0$. კომპაქტური ოპერატორები, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ლოკალურად კვაზი-ექვივალენტურებია 0-ში. ვინაიდან ოპერატორი $\dfrac{1}{2}r_{\mathbb{R}^+}$ ლოკალურად ექვივალენტურია $\dfrac{1}{2}I$ ოპერატორის ∞ უსასრულობაში, კვლავ ვღებულობთ (4.189) ექვივალენტურ სისტემას. □

ლემა 4.5. *ფსევდოდიფერენციალურ* (1.65) *განტოლებათა სისტემა ფრედჰოლმისაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ განტოლებათა სისტემა*

$$\begin{cases} \varphi(t) + \dfrac{1}{2}\left[\boldsymbol{K}_{e^{i\alpha}} + \boldsymbol{K}_{e^{-i\alpha}}\right]\psi(\tau)d\tau = G(t), \\ \psi(t) + \dfrac{1}{2}\left[\boldsymbol{K}_{e^{i\alpha}} + \boldsymbol{K}_{e^{-i\alpha}}\right]\varphi(\tau)d\tau = H(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{4.190}$$

$$\varphi,\ \psi \in \widetilde{\mathbb{W}}{}^{s-1-1/p}_p(\mathbb{R}^+), \qquad G,\ H \in \mathbb{W}^{s-1-1/p}_p(\mathbb{R}^+)$$

ლოკალურად შებრუნებადია 0*-ში, სადაც* $\mathbf{K}^1_c$ *განმარტებულია* (4.174)*-ში.*

დამტკიცება: ლოკალიზაციის ძირითადი პრინციპის თანახმად (იხ. წინადადება 3.4 სტატიაში [30]), (1.65) სისტემა ფრედჰოლმისაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ ლოკალურად ექვივალენტური განტოლებათა სისტემა ლოკალურად შებრუნებადია $\mathbb{R}^+$-ის კომპაქტიფიკაციის ყოველ წერტილში, რომელიც მოიცავს უსასრულო წერტილებს, ე.ი., ყოველი $x \in \overline{\mathbb{R}^+} := \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

(4.189) სისტემა არის ტრივიალურად ცალსახად ამოხსნადი. მაშინ (1.65) სისტემა არის ფრედჰოლმის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ (4.188) ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა არის ლოკალურად შებრუნებადი 0-ში.

დავამტკიცოთ (4.188) და (4.190) სისტემების ლოკალურად ექვივალენტურობა, რომელიც გამომდინარეობს ამ სისტემების 0-ში ლოკალურად ექვივალენტურობიდან.

(4.188)-ში ორივე განტოლება გავამრავლოთ 2-ზე, პირველი განტოლებისთვის გამოვიყენოთ ∂_t დიფერენციალი და (4.177) ფორმულა, ხოლო მეორე განტოლებითვის გამოვიყენოთ (4.175) ფორმულა. ორივე განტოლებაში $\varphi := \partial_t\varphi_+$ და $\psi = \psi_+$ ჩანაცვლების შემდეგ მივიღებთ (4.190) სისტემას. ლოკალურად ექვივალენტურობის სრულად საჩვენებლად გვჭირდება

მხოლოდ დავამატკიცოთ, რომ დიფერენციალი

$$\partial_t := \frac{d}{dt} \ : \ \mathbb{W}^r_p(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{W}^{r-1}_p(\mathbb{R}^+), \qquad \partial_t \ : \ \widetilde{\mathbb{W}}^r_p(\mathbb{R}^+) \to \widetilde{\mathbb{W}}^{r-1}_p(\mathbb{R}^+)$$

არის ლოკალურად შებრუნებადი ნებისმიერ სასრულ $x \in \mathbb{R}$ წერტილში. მართლაც, ოპერატორები

$$\partial_t - iI \ : \ \mathbb{W}^r_p(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{W}^{r-1}_p(\mathbb{R}^+), \qquad \partial_t + iI \ : \ \widetilde{\mathbb{W}}^r_p(\mathbb{R}^+) \to \widetilde{\mathbb{W}}^{r-1}_p(\mathbb{R}^+)$$

არიან იზომორფიზმები (წარმოადგენენ ბესელის პოტენციალებს, იხილეთ [25, Lemma 5.1]). მეორეს მხრივ, ჩადგმები

$$iI \ : \ \mathbb{W}^r_p(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{W}^{r-1}_p(\mathbb{R}^+), \qquad iI \ : \ \widetilde{\mathbb{W}}^r_p(\mathbb{R}^+) \to \widetilde{\mathbb{W}}^{r-1}_p(\mathbb{R}^+)$$

არიან ლოკალურად კომპაქტური სობოლევის ჩადგმების შესახებ თეორემის თანახმად და კომპაქტურ შეშფოთებას არ შეუძლია გავლენა იქონიოს ლოკალურ შებრუნებადობაზე. $\square$

4.3. მოდელური ამოცანისათვის სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლების გამოკვლევა

თეორემის 1.25 დამტკიცება: 4.5 ლემის თანახმად მოდელური შერეული სასაზღვრო ამოცანის სასაზღვრო ფსვდოდიფერენციალური (1.65) განტოლება არის ფრედჰოლმის, თუ ინტეგრალური (4.190) განტოლება არის ლოკალურად შებრუნებადი 0-ში.

გამოვიკვლიოთ (4.190) სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლება. ამისათვის გადავწეროთ ოპერატორული განტოლების სახით

$$\boldsymbol{M}_\alpha \Phi = \boldsymbol{F}, \tag{4.191}$$

$$\Phi := \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathbb{H}}^r_p(\mathbb{R}^+), \qquad \mathbf{F} := \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^r_p(\mathbb{R}^+)$$

სადაც ოპერატორ $\boldsymbol{M}_\alpha \ : \ \widetilde{\mathbb{H}}^r_p(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{H}^r_p(\mathbb{R}^+)$ აქვს შემდეგი ფორმა

$$\boldsymbol{M}_\alpha := \begin{bmatrix} I & \dfrac{1}{2}[\boldsymbol{K}^1_{e^{i\alpha}} + \boldsymbol{K}^1_{e^{i(2\pi-\alpha)}}] \\ \dfrac{1}{2}[\boldsymbol{K}^1_{e^{i\alpha}} + \boldsymbol{K}^1_{e^{i(2\pi-\alpha)}}] & I \end{bmatrix}$$

ვინაიდან $\boldsymbol{K}^1_{e^{i(-\alpha)}} = \boldsymbol{K}^1_{e^{i(2\pi-\alpha)}}$. $\boldsymbol{M}_\alpha$ ოპერატორისთვის 3.37 და 3.38 წინადადებები შეგვიძლია გამოვიყენოთ.

(4.191) განტოლებას ჩვენ ვიკვლევთ ბესელის პოტენციალთა (1.66b) სივრცეში. სობოლევსლობოდეცკის $\mathbb{W}^s_p$ სივრცისთვის დამტკიცება გამომდინაორებს 3.38 წინადადებიდან.

ვინაიდან

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{-i\pi(\Xi-1)+i\alpha(\Xi-r-1)} + e^{-i\pi(\Xi-1)+i(2\pi-\alpha)(\Xi-r-1)}}{2\sin\pi\Xi} \\
&\qquad = e^{-i\pi(\Xi-1)+i\pi(\Xi-r-1)}\frac{e^{i(\pi-\alpha)(\Xi-r-1)} + e^{-i(\pi-\alpha)(\Xi-r-1)}}{2\sin\pi\Xi} \\
&\qquad = e^{-\pi r i}\frac{\cos[(\pi-\alpha)(\Xi-r-1)]}{\sin\pi\Xi}, \quad \Xi := \frac{1}{p} - i\xi,
\end{aligned}$$

(3.116a)-(3.116b) ფორმულების გამოყენებით ჩავწეროთ $\boldsymbol{M}_\alpha$ ოპერატორის სიმბოლო:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^r_{\alpha,p}(\omega) &= \begin{bmatrix} \mathcal{I}^r_p(\omega) & \dfrac{1}{2}[\mathcal{K}^{1,r}_{e^{i\alpha},p} + \mathcal{K}^{1,r}_{e^{i(2\pi-\alpha)},p}](\omega) \\ \dfrac{1}{2}[\mathcal{K}^{1,r}_{e^{i\alpha},p} + \mathcal{K}^{1,r}_{e^{i(2\pi-\alpha)},p}](\omega) & \mathcal{I}^r_p(\omega) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{\pi r i}\dfrac{\sin\pi(\Xi-r)}{\sin\pi\Xi} & e^{-\pi r i}\dfrac{\cos[(\pi-\alpha)(\Xi-r-1)]}{\sin\pi\Xi} \\ e^{-\pi r i}\dfrac{\cos[(\pi-\alpha)(\Xi-r-1)]}{\sin\pi\Xi} & e^{\pi r i}\dfrac{\sin\pi(\Xi-r)}{\sin\pi\Xi} \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{4.192}$$

$$\text{for} \quad \omega = (\infty, \xi) \in \overline{\Gamma_1}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

ჩვენ სიმბოლოს არ ვწერთ $\Gamma_2^{\pm}$ და Γ_3 წირებზე, რადგან მხოლოდ გვაინტერესებს $\boldsymbol{M}_\alpha$ ოპერატორის ლოკალურად შებრუნებადობა 0-ში (იხილეთ თეორემა 1.24, ლემა 4.4, ლემა 4.5 და წინადადება 3.37).

(4.192)-დან გამომდინარეობს:

$$\begin{aligned}\det \mathcal{M}^r_{\alpha,p}(\omega) &= e^{-2\pi r i}\frac{e^{4\pi r i}\sin^2\pi\,(1/p-r-i\xi)-\cos^2(\pi-\alpha)\,(1/p-r-1-i\xi)}{\sin^2\pi\,(1/p-i\xi)}\\ &= e^{2\pi r i}\frac{\sin^2\pi\,(1/p-r-1-i\xi)-e^{-4\pi r i}\cos^2(\pi-\alpha)\,(1/p-r-1-i\xi)}{\sin^2\pi\,(1/p-i\xi)},\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \omega=(\infty,\xi)\in\overline{\Gamma_1}.\end{aligned}$$

ამიტომ, $\mathcal{M}^r_{\alpha,p}(\omega)$ სიმბოლო **არის ელიფსური** Γ_1 წირზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ:

$$\sin^2\pi\left(\frac{1}{p}-r-1-i\xi\right)-e^{-4\pi r i}\cos^2(\pi-\alpha)\left(\frac{1}{p}-r-1-i\xi\right)\neq 0$$

და ეს პირობა ემთხვევა (1.67a)-ს.

(1.67a) პირობა იშლება პირობების ორ მწკრივად:

1. ჩვენ გადავწერთ (1.67a) პირობას შემდეგი ექვივალენტური ფორმით

$$\sin\pi\left(\frac{1}{p}-r-1-i\xi\right)\pm e^{-2\pi r i}\cos(\pi-\alpha)\left(\frac{1}{p}-r-1-i\xi\right)\neq 0.$$

$\pm e^{-2\pi r i}$ ფუნქციის მნიშვნელობები მოთავსებულია ერთეულოვან წრეწირზე და ფარავს სრულად, როცა r იცვლება ინტერვალზე $(a,a+1]$ ნებისმიერი $a\in\mathbb{R}$-თვის. მეორე მხრივ, ფუნქციის გრაფიკის ორი განშტოება

$$g_{p,r}(\xi):=\frac{\sin\pi\left(\dfrac{1}{p}-r-1-i\xi\right)}{\cos(\pi-\alpha)\left(\dfrac{1}{p}-r-1-i\xi\right)},\qquad \xi\in\mathbb{R}, \tag{4.193}$$

კვეთს ერთეულოვან წრეწირს და სხივები

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}^+ &:= \left\{x\cdot\exp\left[i\alpha\left(\frac{1}{p}-r-1\right)-i\frac{\pi}{2}\right]\ :\ x\in\mathbb{R}^+\right\},\\ \boldsymbol{R}^- &:= \left\{x\cdot\exp\left[-i\alpha\left(\frac{1}{p}-r-1\right)-i\frac{\pi}{2}\right]\ :\ x\in\mathbb{R}^+\right\}.\end{aligned} \tag{4.194}$$

წარმოადგენენ ამ განშტოებების ასიმპტოტებს, რომლებიც კვეთენ ერთეულოვან წრეწირს ორ წერტილში.

ამიტომ (1.67a) განტოლებას აქვს ამონახსნის ოთხი წყვილი $\{p'_\pm,\xi'_\pm\},\ \{p''_\pm,\xi''_\pm\}\in(1,\infty)\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ ფიქსირებული $r\in\mathbb{R}$-თვის.

2. თუ $\xi = 0$, განტოლება (1.67a) იძენს შემდეგ სახეს

$$\sin(4\pi r)\cos^2(\pi-\alpha)\left(\frac{1}{p}-r-1\right)\neq 0 \qquad \text{or} \tag{4.195}$$
$$\sin^2\pi\left(\frac{1}{p}-r-1\right)-\cos(4\pi r)\cos^2(\pi-\alpha)\left(\frac{1}{p}-r-1\right)\neq 0.$$

(4.195)-დან ჩვენ მივიღებთ ელიფსურობის შემდეგ პირობებს:

1) თუ $r \neq \dfrac{n}{4}, \dfrac{1}{p}-\dfrac{\pi+2\pi n}{2(\pi-\alpha)}-1$ $\quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$-თვის სიმბოლოს წარმოსახვითი ნაწილი არანულოვანია ნებისმიერი $\alpha \in (0, 2\pi)$ კუთხისთვის (იხილეთ (1.68a) პირობა), სადაც $r \neq \dfrac{n}{4}$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, შემთხვევა გაყოფილია სამად: $r = 0$, $r \neq \dfrac{n}{2}$, $r \neq \dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{4}$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$).

2) თუ $(\pi-\alpha)\left(\dfrac{1}{p}-r-1\right) = \dfrac{\pi}{2}+\pi n$ სიმბოლოს წარმოსახვითი ნაწილი ნულია, მაშინ

$$r = \frac{1}{p}-\frac{\pi+2\pi n}{2(\pi-\alpha)}-1$$

და ნამდვილი ნაწილია

$$\sin^2\pi\left(\frac{1}{p}-r-1\right) = \sin^2\pi\frac{\pi+2\pi n}{2(\pi-\alpha)}\neq 0.$$

მაშინ სიმბოლო ელიფსურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $\alpha \neq \pi\dfrac{2k+1}{2n}$, სადაც $k = 0, \pm1, \ldots,$ $n = \pm1, \pm2, \ldots$ ისეთია, რომ $0 < \dfrac{2k+1}{2n} < 2$ (იხილეთ (1.68b) პირობა).

3) თუ $r = \dfrac{n}{2}$, $n = 0, \pm1, \ldots$, სიმბოლოს წარმოსახვითი ნაწილი ქრება, $\cos(4\pi r) = 1$ და სიმბოლო ელიფსურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ

$$\sin^2\pi\left(\frac{1}{p}-\frac{n}{2}-1\right)-\cos^2(\pi-\alpha)\left(\frac{1}{p}-\frac{n}{2}-1\right)\neq 0$$

და ფორმულის

$$\begin{aligned}\cos^2\omega-\cos^2\theta &= \sin^2\theta-\sin^2\omega = (\sin\theta-\sin\omega)(\sin\theta+\sin\omega)\\ &= 4\sin\frac{\theta+\omega}{2}\cos\frac{\theta-\omega}{2}\sin\frac{\theta-\omega}{2}\cos\frac{\theta+\omega}{2}\\ &= \sin(\theta+\omega)\sin(\theta-\omega) = -\sin(\omega+\theta)\sin(\omega-\theta)\end{aligned} \tag{4.196}$$

გამოყენებით მივიღებთ შემდეგს

$$\begin{aligned}&\sin^2\pi\left(\frac{1}{p}-\frac{n}{2}-1\right)-\cos^2(\pi-\alpha)\left(\frac{1}{p}-\frac{n}{2}-1\right)\\ &= \cos^2\pi\left(\frac{1}{p}-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)-\cos^2(\pi-\alpha)\left(\frac{1}{p}-\frac{n}{2}-1\right)\\ &= -\sin\left[(2\pi-\alpha)\left(\frac{1}{p}-\frac{n}{2}-1\right)+\frac{\pi}{2}\right]\sin\left[\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{n}{2}-1\right)+\frac{\pi}{2}\right]\\ &= -\cos(2\pi-\alpha)\left(\frac{1}{p}-\frac{n}{2}-1\right)\cos\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{n}{2}-1\right)\neq 0.\end{aligned} \tag{4.197}$$

ელიფსურობის პირობაა

$$(2\pi-\alpha)\left(\frac{1}{p}-\frac{n}{2}-1\right)\neq\frac{\pi}{2}+\pi k \text{ და } \alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{n}{2}-1\right)\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$$
$$\Longleftrightarrow\ 2\pi\left(\frac{1}{p}-\frac{n}{2}-1\right)\neq\frac{\pi}{2}+\pi(k+m)\ \Longleftrightarrow\ p\neq\frac{4}{2k+1}$$
$$\Longleftrightarrow\ k=0,1 \text{ და } p\neq 4,\frac{4}{3},$$

ვინაიდან $k=\dots,-2,-1,2,3,\dots$ მნიშვნელობებისთვის ვღებულობთ $p<1$ ($k+n+m+2$ ჩავანაცვლოთ k-თი) (იხილეთ (1.68c) პირობა).

4) თუ $r=\frac{n}{2}-\frac{1}{4}$, $n=0,\pm1,\dots$, მაშინ $\cos 4\pi r=-1$ და თუ n-ს ჩავანაცვლებთ $n+2$-ით, მივიღებთ

$$\sin^2\pi\left(\frac{1}{p}-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cos^2(\pi-\alpha)\left(\frac{1}{p}-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)\neq 0.$$

სიმბოლო ელიფსურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ

$$\pi\left(\frac{1}{p}-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)\neq\pi m \text{ და } (\pi-\alpha)\left(\frac{1}{p}-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)\neq\frac{\pi}{2}(2k+1)\ \Longleftrightarrow$$
$$-\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)\neq\frac{\pi}{2}(2k-4m+1)\ \Longleftrightarrow\ \alpha\neq 2\pi p\frac{2k+1}{(2n+1)p-4},$$

გათვალისწინებულია, რომ $k,n=0,\pm1,\dots$ მოცემულნი არიან ისე, რომ $0<p\frac{2k+1}{(2n+1)p-4}<1$ (ამასობაში k ჩავანაცვლოთ $k+2m$-ით), (იხილეთ (1.68d) პირობა).

(1.67a) განტოლება 1-პერიოდულია r-ის მიმართ, ზემოთ მოცემული ამონახსნები $\xi\neq 0$-თვის არიან პერიოდული: $p_\pm(r_1)=p_\pm(r_2)$ if $r_1-r_2=\pm1,\pm2,\dots$.

განვიხილოთ (1.65) სისტემის ამოხსნადობის ერთადერთობის (1.69) თვისებები არაკლასიკური (1.66b) დასმით.

თუ (1.69) პირობები სრულდება, მაშინ (1.68a) პირობის თანახმად (1.65) სისტემის სიმბოლო ელიფსურია. უფრო მეტიც, $r=-\frac{1}{2}$-თვის, $p=2$ და ნებისმიერი $0<\alpha<2\pi$-თვის (1.65) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი (იხ. თორემის 1.24 დასკვნითი ნაწილი). ვინაიდან $r=-\frac{1}{2}$, $p=2$ აგრეთვე აკმაყოფილებენ (1.69) პირობებს, 3.38 წინადადების თანახმად სასაზღვრო ინტგრალურ განტოლებათა (1.65) სისტემას აქვს ერთადერთი წყვილი α, r და p პარამეტრების ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის რომელიც აკმაყოფილებს (1.69) პირობას და ნებისმიერი $0<\alpha<2\pi$-თვის. $\square$

თეორემის 1.22 დამტკიცება: 1.24 თეორემის თანახმად, (1.54) სასაზღვრო ამოცანა ფრედჰოლმისაა არაკლასიკური (1.56) დასმით, თუ (1.65) სისტემათვის (1.66a) სრულდება პირობა $r=s-1-\frac{1}{p}$. (1.54) სასაზღვრო ამოცანისათვის ელიფსურობის (4.195) პირობები აკმაყოფი-

ლებს (1.60) ფორმას და შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი ფორმით:

$$\sin 4\pi\left(s-\frac{1}{p}\right)\sin^2\pi\left(s-\frac{2}{p}\right)\neq 0 \quad \text{or} \tag{4.198}$$

$$\cos 4\pi\left(s-\frac{1}{p}\right)\sin^2\pi\left(s-\frac{2}{p}\right)+\cos^2(\pi-\alpha)\left(s-\frac{2}{p}\right)\neq 0.$$

(4.198)-დან, შეზღუდვის $\frac{1}{p}<s<1+\frac{1}{p}$ გათვალისწინებით, ვღებულობთ ელიფსურობის შემდეგ პირობებს:

1) თუ $s=\frac{1}{p}+\frac{1}{4},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{2},\ \frac{1}{p}+\frac{3}{4}$ or $s=\frac{2}{p}$, წარმოსახვითი ნაწილი ქრება. მეორე მხრივ, $s=\frac{1}{p}+\frac{1}{2}$ და $s=\frac{2}{p}$ მნიშვნელობები უნდა გამოირიცხოს, რადგან ნამდვილი ნაწილი არანულოვანია და სიმბოლო ელიფსურია. დარჩენილი პირობა ემთხვევა (1.61a)-ს.

2) თუ $s=\frac{1}{p}+\frac{m}{4}$, $m=1,3$ მაშინ $\cos 4\pi\left(s-\frac{1}{p}\right)=\cos 4\pi\, m=-1$ და (4.196), (4.197) მსგავსად მივიღებთ:

$$\sin^2\pi\left(\frac{m}{4}-\frac{1}{p}\right)-\cos^2(\pi-\alpha)\left(\frac{m}{4}-\frac{1}{p}\right)$$
$$=-\cos(2\pi-\alpha)\left(\frac{m}{4}-\frac{1}{p}\right)\cos\alpha\left(\frac{m}{4}-\frac{1}{p}\right)\neq 0,\quad m=1,3.$$

შევნიშნოთ, რომ $\frac{m}{4}-\frac{1}{p}=0$-თვის, $m=1,3$, ე.ი.$p=4,\quad 3p=4$-თვის სიმბოლო უკვე ელიფსურია და ამიტომ ჩავთვალოთ, რომ $p\neq 4,\quad 3p\neq 4$. მიღებული გამოსახულებიდან ჩვენ ვღებულობთ ელიფსურობის შემდეგ პირობას:

$$\begin{gathered}(2\pi-\alpha)\left(\frac{m}{4}-\frac{1}{p}\right)\neq \pi k+\frac{\pi}{2}\ \text{ and }\ \alpha\left(\frac{m}{4}-\frac{1}{p}\right)\neq \pi k+\frac{\pi}{2}\\ \Longleftrightarrow\quad \alpha,\ 2\pi-\alpha\neq 2\pi\, p\frac{2k+1}{mp-4},\quad m=1,3,\quad k=0,\pm1,\dots\end{gathered} \tag{4.199}$$

რადგან $\alpha,\ 2\pi-\alpha\in(0,2\pi)$, უნდა დავაწესოთ შეზღუდვები

$$0<\frac{2k+1}{p-4}<\frac{1}{p},\quad 0<\frac{2k+1}{3p-4}<\frac{1}{p}.$$

ამ უტოლობებს აქვთ შემდეგი ამონახსნები: $k=-1$, $1<p<2$ და $k=0$, $2<p<\infty$. მაშინ (4.199) პირობები აკმაყოფილებენ შემდეგ ფორმას:

$$\alpha,\ 2\pi-\alpha\neq 2\pi\frac{p}{4-p}\quad \text{თუ}\quad 1<p<2,$$
$$\alpha,\ 2\pi-\alpha\neq 2\pi\frac{p}{3p-4}\quad \text{თუ}\quad 2<p<\infty.$$

მიღებული კავშირები როგორც (1.61b)-ში ჩაწერილია ექვივალენტური ფორმულირებით.

(1.54) სასაზღვრო ამოცანისათვის განვიხილოთ ამოხსნადობის ერთადერთობის (1.62) პირობები არაკლასიკური (1.56) დასმით.

თუ (1.62) პირობა სრულდება, (1.54) სასაზღვრო ამოცანა ფრედჰოლმისაა ნებისმიერი $0 < \alpha < 2\pi$-თვის (1.59) პირობის ძალით. უფრო მეტიც, (1.54) სასაზღვრო ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი კლასიკური დასმით $s = 1$, $p = 2$ და ნებისმიერი $0 < \alpha < 2\pi$-თვის (იხ. თეორემა 1.21). მაგრამ $s = 1$, $p = 2$ აგრეთვე აკმაყოფილებენ (1.62) პირობებს და 3.38 წინადადების გამოყენებით, (1.54) სასაზღვრო ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი ნებისმიერი $0 < \alpha < 2\pi$-თვის და r და p პარამეტრების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.62) პირობებს. $\square$

ლიტერატურა

[1] *L. Andersson, P.T. Chrusciel,* Cauchy data for vacuum Einstein equations and obstructions to smoothness of null infinity, Phys. Rev. Lett., 70, 2829–2832, 1993.

[2] *R. Aris,* Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.

[3] *A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel and P. Ciarlet Jr.,* T-coercivity for scalar interface problems between dielectrics and metamaterials, ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 46:1363-1387, 2012.

[4] *A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel and X. Claeys,* Radiation condition for a non-smooth interface between a dielectric and a metamaterial, Published online: http://hal.inria.fr/hal-00651008/

[5] *A.-S. Bonnet-Ben Dhia and A. Tillequin,* A limiting absorption principle for scattering problems with unbounded obstacles, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 24, 1089-1111, 2001.

[6] *T. Buchukuri, R. Duduchava, D. Kapanadze & M. Tsaava,* Localization of a Helmholtz boundary value problem in a domain with piecewise-smooth boundary, Proccedings of A. Razmadze Mathematical Institute, 162, 37–44, 2013.

[7] *L.P. Castro, R. Duduchava, F.-O. Speck,* Localization and minimal normalization of mixed boundary value problems, Factorization, Singular Operators and Related Problems, 73-100, 2003.

[8] *L.P. Castro and D. Kapanadze,* Diffraction by a strip and by a half-plane with face impedances, Operator Theory: Advances and Applications, 181, 159-172, 2008.

[9] *L.P. Castro and D. Kapanadze,* Dirichlet-Neumann-impedance boundary value problems arising in rectangular wedge diffraction problems, Procedings of the American Mathematical Society, 136, 2113–2123, 2008.

[10] *L.P. Castro and D. Kapanadze,* Exterior wedge diffraction problems with Dirichlet, Neumann and impedance boundary conditions, Acta Applicandae Mathematicae, 110, 1, 289-311, 2010.

[11] *L.P. Castro and D. Kapanadze,* Wave diffraction by wedges having arbitrary aperture angle, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 421, 1295–1314, 2015.

[12] *L.P. Castro, F.-O. Speck and F.S. Teixeira,* Explicit solution of a Dirichlet-Neumann wedge diffraction problem with a strip, Journal of Integral Equations and Applications, 5, 359-383, 2003.

[13] *L.P. Castro, F.-O. Speck and F.S. Teixeira,* On a class of wedge diffraction problems posted by Erhard Meister, Operator Theory: Advances and Applicatons, 147, 211-238, 2004.

[14] *L.P. Castro, F.-O. Speck and F.S. Teixeira,* Mixed boundary value problems for the Helmholtz equation in a quadrant, Integral Equations and Operator Theory, 56, 1-44, 2006.

[15] *G. Chkadua,* Mixed type boundary value problems for polymetaharmonic equations, Georgian Mathematical Journal, 23, 3, 489-510, 2016.

[16] *P.G. Ciarlet,* Introduction to Linear Shell Theory, Series in Applied Mathematics, Vol. 1, Gauthier-Villars, Éditions Scientifiques et Médicales Elsevier, Paris, North-Holland, Amsterdam, 1998.

[17] *M. Dauge,* Elliptic Boundary Value Problems in Corner Domains, Smoothness and Asymptotics of Solutions, Lecture Notes in Math., 1341, Springer-Verlag Berlin 1988.

[18] *V. Didenko and R. Duduchava,* Mellin convolution operators in Bessel potential spaces with admissible meromorphic kernels, Journal of Analysis and Applications, 443, 707-731, 2016.

[19] *V.D. Didenko, B. Silbermann,* Approximation of Additive Convolution-Like Operators: Real C^*-Algebra Approach, Birkhäuser, Basel, 2008.

[20] *R.Duduchava,* On general singular integral operators of the plane theory of elasticity, Rendiconti Sem. Mat. Univers. e Politecn. Torino, 42, 15-41, 1984.

[21] *R. Duduchava,* On multidimensional singular integral operators I-II, Journal of Operator Theory, 11, 41-76, 199-214, 1984.

[22] *R. Duduchava,* The Green formula and layer potentials, Integral Equations and Operator Theory, 41, 2, 127-178, 2001.

[23] *R. Duduchava,* Partial differential equations on hypersurfaces, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 48, 19-74, 2009.

[24] *R. Duduchava,* A revised asymptotic model of a shell, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 52, 65-108, 2011.

[25] *R. Duduchava,* Integral equations with fixed singularities, Teubner, Leipzig, 1979.

[26] *R. Duduchava,* An application of singular integral operators to some problems of elasticity, Integral Equations and Operator Theory, 5, 475-489, 1982.

[27] *R. Duduchava,* General singular integral equations and basic theorems of the plane theory of elasticity, (Russian), Trudi Tbiliskogo Mathematicheskogo Instituta Academii Nauk Gruzinskoi SSR, 82, 45-89, 1986.

[28] *R.Duduchava,* On an algebra generated by convolutions and discontinuous functions, Integral Equations and Operator Theory, 10, 505-530, 1987.

[29] *R. Duduchava,* On Noether theorems for singular integral equations, (Russian), Proceedings of Symposium on Mechanics and Related Problems of Analysis, 1, Metsniereba, Tbilisi, 19-52, 1973.

[30] *R. Duduchava,* Mellin convolution operators in Bessel potential spaces with admissible meromorphic kernels, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 60, 135-177, 2013.

[31] *R. Duduchava,* Mixed type boundary value problems for Laplace-Beltrami equation on a surface with the Lipschitz boundary, Georgian Mathematical Journal, DOI: https://doi.org/10.1515/gmj-2020-2074 | Published online: 11 Aug 2020.

[32] *R.Duduchava, D.Mitrea, M.Mitrea,* Differential operators and boundary value problems on surfaces, Mathematische Nachrichten, 9-10, 996-1023, 2006.

[33] *R. Duduchava, D. Natroshvili and E. Shargorodsky,* Basic boundary value problems of thermoelasticity for anisotropic bodies with cuts. I-II, Georgian Mathematical Journal, 2, 123-140, 259-276, 1995.

[34] *R. Duduchava and M. Tsaava,* Mixed boundary value problems for the Helmholtz equation in arbitrary 2D-sectors, Georgian Mathematical Journal, 27, 2, 211–231, 2020.

[35] *R. Duduchava and M. Tsaava,* Mixed boundary value problems for the Laplace-Beltrami equation, Complex Variables and Elliptic Equations, 63, 1468-1496, 2018.

[36] *R. Duduchava, M. Tsaava, T. Tsutsunava,* Mixed boundary value problem on hypersurfaces, International Journal of Differential Equations, Hindawi Publishing Corporation, Article ID 245350, 8 pages, 2014.

[37] *T. Ehrhardt, A.P. Nolasco and F.-O. Speck,* Boundary integral methods for wedge diffraction problems: the angle $2\pi/n$, Dirichlet and Neumann conditions, Operators and Matrices, 5,1-40, 2011.

[38] *T. Ehrhardt, A.P. Nolasco and F.-O. Speck,* A Riemannn surface approach for diffraction from rational wedges, Operators and Matrices, 8, 301-355, 2014.

[39] *G. Eskin,* Boundary Value Problems for Elliptic Pseudodifferential Equations, Translations of Mathematical Monographs, vol. 52, AMS, Providence 1981.

[40] *I. Gohberg, N. Krupnik,* One-Dimensional Linear Singular Integral Equations, I-II, Operator Theory: Advances and Applicatons, Birkhäuser, Basel, 53-54, 1979.

[41] *P.Grisvard,* Elliptic Problems in Non-smooth Domains, Pitman, London, Boston 1985.

[42] *I. C. Gradstein, I. M. Ryzhik,* Tables of Integrals, sums, series and products, Academic press, San Diego, 1994 (translated from Russian, FizMatGIZ, Moscow, 1963).

[43] *W. Haack,* Elementare Differentialgeometrie, (German), Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften,

[44] *L. Hörmander,* The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Springer-Verlag, I-IV, Heidelberg 1983.

[45] *G. C. Hsiao, W. L. Wendland,* Boundary Integral Equations, Applied Mathematical Sciences Series, 164, Springer-Verlag, Berlin 2008. 20, Basel-Stuttgart: Birkhäuser Verlag, VIII, 1955.

[46] *D. Kapanadze and B.-W. Schulze,* Crack Theory and Edge Singularities, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[47] *A.I. Komech, N.J. Mauser and A.E. Merzon,* On Sommerfeld representation and uniqueness in scattering by wedges, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 28, 147-183, 2005.

[48] *V. Kondrat'jev,* Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points, Transactions Moscow Mathematical Society, 16, 227-313, 1967.

[49] *V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya and J. Rossmann,* Spectral Problems Associated with Corner Singularities of Solutions to Elliptic Equations, AMS, Providence, 2001.

[50] *P.A. Krutitskii,* The Dirichlet problem for the dissipative Helmholtz equation in a plane domain bounded by closed and open curves, Hiroshima Mathematical Journal, 28, 149-168, 1998.

[51] *P.A. Krutitskii,* The Neumann problem in a 2-D exterior domain with cuts and singularities at the tips, Journal of Differential Equations, 176, 269-289, 2001.

[52] *P.A. Krutitskii,* On the mixed problem for harmonic functions in a 2D exterior cracked domain with Neumann condition on cracks, Quarterly of Applied Mathematics, 21 65 (1), 25-42, 2007.

[53] *P.A. Krutitskii,* The Helmholtz equation in the exterior of slits in a plane with different impedance boundary conditions on opposite sides of the slits, Quarterly of Applied Mathematics, 67, 1, 73-92, 2009.

[54] *P.D. Lax, A.N. Milgram,* Parabolic equations, Contributions to the theory of partial differential equations, pp. 167-190, Annals of Mathematics Studies, 33, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954.

[55] *H. Le Dret,* Numerical Approximation of PDEs, Master 1 Lecture Notes, 2011–2012, https://www.ljll.math.upmc.fr/ledret/M1ApproxPDE.html

[56] *J. L. Lions, E. Magenes,* Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications I, Springer-Verlag, Heidelberg 1972.

[57] *G. D. Maliuzhinets,* Excitation, reflection and emission of surface waves from a wedge with given face impedances, (English; Russian original), *Sov. Phys., Dokl.* **3** (1958), 752-755; translation from *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **121**, 436-439, 1959.

[58] *E. Meister,* Some multiple-part Wiener-Hopf problems in Mathematical Physics, Mathematical Models and Methods in Mechanics, Banach Center Publications, 15, PWN - Polish Scientific Publishers, Warsaw, 359-407, 1985.

[59] *E. Meister,* Some solved and unsolved canonical problems of diffraction theory, Lecture Notes in Math., 1285, 320-336, 1987.

[60] *E. Meister and F.-O. Speck,* Some multidimensional Wiener-Hopf equations with applications, Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics, 2, Pitman, London, 217-262, 1979.

[61] *E. Meister, F. Penzel, F.-O. Speck and F. S. Teixeira,* Some interior and exterior boundary value problems for the Helmholtz equation in a quadrant, Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, 123, 193-237, 1993.

[62] *M. Mitrea and M. Taylor,* Potential theory on Lipschitz domains in Riemannian manifolds: Sobolev-Besov space results and the Poisson problem, Journal of Functional Analysis, 176, 1-79, 2000.

[63] *A. Moura, Santos, N., J. Bernardino,* Image normalization of Wiener-Hopf operators and boundary-transmission value problems for a junction of two half-planes, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 377, 274-285, 2011.

[64] *B. Noble,* Methods Based on the Wiener-Hopf Technique, Pergamon, London 1958.

[65] *M. Shubin,* Pseudodifferential Operators and Spectral Theory, Springer-Verlag, Berlin 1987 (Russian edition: Nauka, Moscow 1978).

[66] *A. F. dos Santos and F. S. Teixeira,* The Sommerfeld problem revisited: solution spaces and the edge conditions, Journal of Mathematical Analaysis and Applications, 143, 341-357, 1989.

[67] *I. Simonenko,* A new general method of investigating linear operator equations of singular integral equation type. I, Izv. Akad. Nauk SSSR Math, 29:3, 567-586, 1965.

[68] *M. E. Taylor,* Pseudodifferential operators, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1981.

[69] *R. Temam and M. Ziane,* Navier-Stokes equations in thin spherical domains, Optimization Methods in Partial Differential Equations, Contemporaty Math., AMS, Vol. 209, pp. 281–314, 1997.

[70] *H. Triebel,* Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, 2-nd edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg, 1995.

[71] *M. Tsaava,* The boundary Value Problems for the Bi-Laplace-Beltrami Equation, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 77, 93-103, 2019.

[72] *P. Y. Ufimtsev,* Theory of Edge Diffraction in Electromagnetics, Tech Science Press, Encino, California, 2003.

[73] *V. B. Vasil'ev,* Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[74] *W. L. Wendland, E. Stephan and G. C. Hsiao,* On the integral equation method for the plane mixed boundary value problem of the Laplacian, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 1, 265-321, 1979.

[75] *P. Zhevandrov and A. Merzon,* On the Neumann problem for the Helmholtz equation in a plane angle, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 23, 1401-1446, 2000.