„საქართველოს უნივერსიტეტი“

მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების სკოლა

სადოქტორო პროგრამა: მათემატიკა

ხელნაწერის უფლებით

მედეა ცაავა

სასაზღვრო ამოცანები ელიფსური განტოლებებისათვის ლიფშიცის საზღვრიან ჰიპერზედაპირებზე

მათემატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი ნაშრომის

სადისერტაციო მაცნე

(სპეციალობა - ___ - მათემატიკა)

თბილისი

2021

სასაზღვრო ამოცანები ჰიპერზედაპირებზე

სადისერტაციო ნაშრომი შესრულებულია საქართველოს უნივერსიტეტის მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების სკოლაში.

სადისერტაციო საბჭოს შემადგენლობა:

თავმჯდომარე - პროფესორი სოსო გოგილიძე

სამეცნიერო ხელმძღვანელი - პროფესორი როლანდ დუდუჩავა

გარე ექსპერტი - პროფესორი თენგიზ ბუჩუკური

გარე ექსპერტი - პროფესორი ევგენი შარგოროდსკი

გარე ექსპერტი - პროფესორი ოთარ ჯოხაძე

დისერტაციის დაცვა შედგება 2021 წლის 23 ივნისს 16:00 საათზე

მისამართზე: თბილისი, კოსტავას 77ა, 519 აუდიტორია

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება საქართველოს უნივერსიტეტის ბიბლიოთეკაში

სადისერტაციო მაცნე დაიგზავნა 2021 წლის 22 მაისს.

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი, სადოქტორო საფეხურისა და საკვალიფიკაციო ნაშრომების მენეჯერი - ნათია მანჯიკაშვილი

ნაშრომის ზოგადი დახასიათება:

პრობლემატიკას, რომელთა დამუშავებას ისახავს მიზნად მოცემული დისერტაცია, ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების გამოკვლევებში.

სადისერტაციო ნაშრომში გამოკვლეულია სხვადასხვა სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნადობის და ერთადერთობის საკითხი მაღალი რიგის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის ჰიპერზედაპირზე როგორც კლასიკური, ასევე არაკლასიკური დასმით. კერძოდ, "ანიზოტროპული" ლაპ-ლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებებისათვის გამოკვლეულია როგორც დირიხლეს და ნეიმანის, ასევე შერეული სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა ბესელის პოტენციალთა $\mathbb{H}^1_2(\mathcal{C})$ სივრცეში გლუვ $\mathcal{C}$ ჰიპერზედა-პირზე გლუვი $\Gamma = \partial\mathcal{C}$ საზღვრით.

დასმული ამოცანების ჩამოსაყალიბებლად გამოყენებული იქნა გიუნტერის წარმოებულები და შესაბამისად ლაპლას-ბელტრამის და ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორი ჩაიწერა მარტივი ფორმით. ამოცანების განხილვისას დამტკიცებული იქნა $\mathrm{div}_{\mathcal{S}}(A\nabla_{\mathcal{S}}) + \mathcal{H}I : \mathbb{H}^s_p(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-2}_p(\mathcal{S})$ "შეშფოთებული" ოპერატო-რის შებრუნებადობა, სადაც $A(x)$ არის $n \times n$ შემოსაზღვრული ზომადი დადებითად განსაზღვრული მატრიც-ფუნქცია, ხოლო $\mathcal{H}$ წარმოადგენს გლუვ ფუნქციას, აქვს არაუარყოფითი ნამდვილი ნაწილი $\mathrm{Re}\mathcal{H}(t) \geqslant 0$ ყველა $t \in \mathcal{S}$ -სთვის და $\mathrm{mes\,supp\,Re}\mathcal{H} \neq 0$. იგივე შედეგი მიღებულია შეშფოთებული ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორისათვის $\Delta^2_{\mathcal{S}} + \mathcal{H}I : \mathbb{H}^s_p(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-4}_p(\mathcal{S})$. აქ $\mathcal{S}$ წარ-მოადგენს ჰიპერზედაპირს საზღვრის გარეშე, ხოლო $1 < p < \infty$ და $-\infty < s < \infty$ ნებისმიერია. უფრო მეტიც, $\mathrm{div}_{\mathcal{S}}(A\nabla_{\mathcal{S}})$ და $\Delta^2_{\mathcal{S}}$ ოპერატორებისათვის დამტკიცებულია ფუნდამენტური ამონახსნის არსებობა, რომელიც განმარტებულია როგორც ამ ოპერატორების შებრუნებულები სივრცეებში $\mathbb{H}^s_{p,\#}(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-2}_{p,\#}(\mathcal{S})$

და $\mathbb{H}^{s}_{p,\#}(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-4}_{p,\#}(\mathcal{S})$ შესაბამისად (ან კიდევ შებრუნებული ოპერატორის ჰერმანდერის ბირთვი), სადაც $\mathbb{H}^{s}_{p,\#}(\mathcal{S})$ არის ბესელის პოტენციალთა სივრცის ქვესივრცე რომელიც შედგება ისეთი ფუნქციებისაგან, რომელთა საშუალო მნიშვნელობა ნულია.

სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნადობის და ერთადერთობის დასამტკიცებლად გამოყენებული იქნა გრინის ფორმულები, კვალების არსებობა და ლაქს-მილგრამის ლემა. ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორისთვის გრინის ფორმულები ჰიპერზედაპირზე ჩაიწერა მარტივად გიუნტერის წარმოებულების საშუალებით. სასაზღვრო ამოცანისათვის მაღალი რიგის კვალების არსებობა დამტკიცებულ იქნა კვალების შესახებ რ. დუდუჩავას მიერ მიღებული ლემის და გრინის ფორმულის გამოყენებით.

არაკლასიკური დასმით განხილვისას გამოკვლეულია როგორც ჩვეულებრივი, ასევე შერეული სასაზღვრო პირობებით ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებებისათვის ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა ბესელის პოტენციალთა $\mathbb{H}^{s}_{p}(\mathcal{C})$ და სობოლევ-სლობოდეცკის $\mathbb{W}^{s}_{p}(\mathcal{C})$ სივ-რცეებში გლუვ $\mathcal{C}$ ჰიპერზედაპირზე გლუვი $\Gamma = \partial(\mathcal{C})$ საზღვრით და შერეული სასაზღვრო ამოცანა ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის კუთხოვან $\Omega_{\alpha} \subset \mathbb{R}^{2}$ არეში α კუთხით.

სასაზღვრო ამოცანების განხილვისას ერთ-ერთ პრობლემას წარმოადგენდა ფუნდამენტური ამონახსნის არსებობა ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორებისათვის. დამტკიცებულ იქნა ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორის შებრუნებადობა ბესელის პოტენციალთა სივრცეებში კონსტანტების გამოკლებით. აღმოჩნდა, რომ ასეთ სივრცეებში, მოცემულ ოპერატორებს გააჩნიათ ფუნდამენტური ამოხასნი. ამან მოგვცა საშუალება აგვეგო ნიუტონის და ფენოვანი პოტენციალები და გამოგვეყენებინა პოტენციალთა მეთოდი. შერეული დირიხლე-ნეიმანის სასაზღვრო ამოცანის გამოსაკვლევად ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის ვიყენებთ კვაზი-ლოკალიზაციას და ვღებულობთ მოდელურ სასაზღვრო ამოცანას ლაპლასიანისთვის ნახევარსიბრტყეზე, სიბრტყეზე და

კუთხოვან არეზე. მოდელური სასაზღვრო ამოცანა სიბრტყეზე და ნახევარსიბრტყეზე კარგად არის შესწავლილი. მოდელური სასაზღვრო ამოცანა კუთხოვან არეზე გამოკვლეულია პოტენციალთა მეთოდით და დაყვანილია ექვივალენტურ მელინის კონვოლუციის განტოლებათა სისტემაზე სობოლევ-სლობოდეცკის სივრცეში ნახევარღერძზე. მელინის კონვოლუციის განტოლებები ბესელის პოტენციალთა სივრცეებში გამოკვლეულია ვ. დიდენკოსა და რ. დუდჩავას მიერ. მიღებულ შედეგებზე დაყრდნობით აგებულია ცხადად მიღებული სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების სისტემის სიმბოლო, რომელიც უზრუნველჰყოფს ამოხსნადობის და ფრედჰომლურობის თვისებებს, გვამლევს სისტემის ინდექსის ჩაწერის საშუალებას. სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის კრიტერიუმი არაკლასიკური დასმით მოცემულია ცხადად.

ანალოგიურად, სასაზღვრო ამოცანის გამოსაკვლევად ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის გამოყენებულ იქნა კვაზი-ლოკალიზაცია და თავდაპირველი სასაზღვრო ამოცანის გამოკვლევა დავიდა ბი-ლაპლასიანისთვის მოდელური სასაზღვრო ამოცანის გამოკვლევაზე ნახევარსიბრტყეში, რომელიც გამოკვლეულია პოტენციალთა მეთოდით და დაყვანილია ექვივალენტურ კოშის ტიპის განტოლებათა სისტემაზე.

ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის სასაზღვრო ამოცანა გამოკვლეულია არაკლასიკური დასმით α გაშლის მქონე კუთხოვან არეში Ω_α და ამონახსნი იძებნება ბესელის პოტენციალთა $\mathbb{H}_p^s(\Omega_\alpha)$, $s>1/p$, $1<p<\infty$ სივრეებში. ამოცანა გამოკვლეულია პოტენციალთა მეთოდის გამოყენებით და დაყვანილია ექვივალენტურ სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე სობოლევ-სლობოდეცკის სივრცეში $\mathbb{W}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^+)$ ნახევრად უსასრულო ღერძზე, სადაც მიღებული განტოლებათა სისტემა არის მელინის კონვოლუციის ტიპის. გამოყენებულია ვ. დიდენკოსა და რ. დუდჩავას მიერ მიღებული შედეგები მელინის კონვოლუციის განტოლებებისათვის. ნაპოვნი იქნა სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის ცხადი პირობები სობოლევ-

სასაზღვრო ამოცანები ჰიპერზედაპირებზე

სლობოდეცკისა $\mathbb{W}_p^r(\mathbb{R}^+)$ და ბესელის პოტენციალთა $\mathbb{H}_p^r(\mathbb{R}^+)$ სივრცეებში მთელი r-სათვის, რომელიც გამოყენებულ იქნა ჰელმჰოცის განტოლებისათვის საწყისი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობის, ამონახსნის ერთადერთობის და ფრედჰოლმურობის პირობების დასადგენად ზემოთ აღნიშნული არა-კლასიკური დასმით.

სადოქტორო ნაშრომი მოიცავს შემდეგ თავებს:

1) შესავალი,
2) ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის შერეული სასაზღვრო პირობებით ჰიპერზედაპირზე $\mathbb{H}_2^1(\mathcal{C})$ სივრცეში ,
3) ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის შერეული სასაზღვრო პირობებით ჰიპერზედაპირზე $\mathbb{H}_p^s(\mathcal{C})$ სივრცეში,
4) ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის სწორკუთხოვან $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ არეში α კუთხით.

და გამოყენებულია შემდეგი სტატიები:

• R. Duduchava, M. Tsaava, T. Tsutsunava, "Mixed Boundary Value Problem on Hyper\-sur\-faces", International Journal of Differential Equations, 2014, 1-8.

• M. Tsaava, "The boundary Value Problems for the Bi-Laplace-Beltrami Equa\-tion", Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, Vol: 77, 2019, 93-103.

• R. Duducava, M. Tsaava, "Mixed Boundary Value Problems for the Laplace-Beltrami Equation", Complex Variables and Elliptic Equations, Vol: 63, 2018, 1468-1496.

სასაზღვრო ამოცანები ჰიპერზედაპირებზე

• M. Tsaava, "Bi-Laplace-Beltrami Equation on a Hypersurface", Transactions of A. Razma\-dze Mathematical Institute, Vol: 173, (2019), 3, 147-157.

• R. Duduchava, M. Tsaava, "Mixed Boundary Value Problems for the Helmholtz Equation in a Model 2D angular Domain", Georgian Mathematical Journal, Vol: 27, 2, 2020, 211–231.

• T. Buchukuri, R. Duduchava, D. Kapanadze, M. Tsaava, "Localization of a Helmholtz boun-da-ry value problem in a domain with piecewise-smooth boundary", Proceedings of A. Razmadze Mathematical institute, Vol: 162, 37-44, 2013.

კვლევის სიახლე და ინოვაციურობა

მათემატიკური ფიზიკის მრავალი ამოცანა, მაგალითად, ბზარების ამოცანები დრეკად გარემოში, ელექტრომაგნიტური ტალღების გაბნევა ზედაპირების მიერ კუთხოვანი საზღვრით (ეგრეთწოდებული არეები ლიფშიცის საზღვრით). გარსების განტოლება ზედაპირზე კუთხოვანი საზღვრით (ჰიპერზედაპირები ლიფშიცის საზღვრით) და მრავალი სხვა ყალიბდება სასაზღვრო ამოცანების სახით ელიფსური კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებისათვის ჰიპერზედაპირებზე და ბრტყელ არეებში კუთხოვანი საზღვრით. ასეთი სასაზღვრო ამოცანები ლოკალიზაციის მეთოდით დაიყვანება ექვივალენტურ მოდელურ ამოცანებზე ბრტყელ კუთხეებში, რომლის საზღვარი შედგება კოორდინატთა სათავიდან გამომავალი ორი სხივისაგან, დახრილი ერთმანეთთან რაღაც კუთხით. მოდელური ამოცანა შეისწავლება პოტენციალთა მეთოდით. შედეგად სასაზღვრო ამოცანა დაიყვანება სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებაზე, რომელიც წარმოადგენს მელინის კონვოლუციის განტოლებას (განტოლებას უძრავი სინგულარობით) მერომორფული ბირთვით. ხდება მიღებული განტოლების ამოხსნადობის სრული გამოკვლევა, რაც საშუალებას გვაძლებს გავაკეთოთ დასკვნები საწყისი სასაზღვრო ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობისა და ამონახსნის თვისებების შესახებ. პრობლემატიკა, რომელიც განხილულია

სადოქტორო ნაშრომში, წარმოადგენს ერთერთ აქტუალურ საკითხს მათემატიკური ფიზიკის ამოცანების განხილვაში. ტექნიკა, რომელიც გამოიყენება ამოცანების პრობლემის გადაჭრაში, განვითარდა უკანასკნელი წლების განმავლობაში პროფესორების დუდუჩავასა და დიდენკოს მიერ (მელინის კონვოლუციის ოპერატორები). სწორედ ამ ტექნიკის გამოყენებით დამტკიცდა ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისა-თვის ჩვეულებრივი და შერეული სასაზღვრო პირობებით არაკლასიკური დასმით.

სასაზღვრო ამოცანების განხილვისას ერთ-ერთ პრობლემას წარმოადგენდა ფუნდამენტური ამონახსნის არსებობა ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორებისათვის ჰიპერზედაპირზე. ჰიპერზედაპირზე და ევკლიდის $\mathbb{R}^n$ სივრცეში დიფერენციალურ ოპერატორებს შორის ძირითად განსხვავებას წარმოადგენს ფუნდამენტური ამონახსნის არსებობა: ევკლიდის $\mathbb{R}^n$ სივრცეში ფუნდამენტური არსებობს ყველა ელიფსური კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური ოპერატორისთვის მუდმივი კოეფიციენტებით, თუ იგი იგივურად ნულის ტოლი არ არის. ჰიპერზედაპირზე ლაპლას-ბელტრამისა $\Delta_{\mathcal{C}} : \mathbb{H}^s_p(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-2}_p(\mathcal{S})$ და ბი-ლაპლას-ბელტრამის $\Delta^2_{\mathcal{C}} : \mathbb{H}^{s+2}_p(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-2}_p(\mathcal{S})$ ოპერატორებს არ გააჩნიათ ფუნდამენტური ამონახსნი, რადგან მათ აქვთ არატრივიალური ბირთვი, რომელიც შედგება კონსტანტებისაგან. შესაბამისად, ლაპლას-ბელტრამისა და ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორებს განვიხილავთ ბესელის პოტენციალთა სივრცეებში $\Delta_{\mathcal{C}} : \mathbb{H}^s_{p,\#}(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-2}_{p,\#}(\mathcal{S})$ და $\Delta^2_{\mathcal{C}} : \mathbb{H}^{s+2}_{p,\#}(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-2}_{p,\#}(\mathcal{S})$, სადაც ფუნქციათა საშუალოები ნულია (არ შეიცავენ კონსტანტებს) ყველა $1 < p < \infty$ და $s \in \mathbb{R}$-სთვის და დავამტკიცებთ, რომ არიან შებრუნებადი ოპერატორები. დადგენილი შებრუნებადობა ნიშნავს ფუნდამენტური ამონახსნის არსებობას, რომელიც გამოიყენება ნიუტონის და ფენოვანი პოტენციალების განმარტებისას.

კვლევის მეთოდოლოგია:

ნაშრომი არის თეორიული ხასიათის, რომელიც ეხება ჰიპერზედაპირზე მაღალი რიგის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის სხვადასხვა სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხს როგორც სუსტი კლასიკური, ასევე სუსტი არაკლასიკური დასმით. დასმული ამოცანების ჩამოსაყალიბებლად ვიყენებთ გიუნტერის წარმოებულებს, ხოლო პრობლემების გადასაჭრელად ვიყენებთ ლაქს-მილგრამის ლემას ამოცანის სუსტი კლასიკური დასმით განხილვისას და პოტენციალთა მეთოდს ამოცანის სუსტი არაკლასიკური დასმით განხილვისას.

გიუნტერის წარმოებულებზე დამყარებული მეთოდის უპირატესობა მდგომარეობს განსახილავი ოპერატორის მარტივი ფორმით ჩაწერაში. გარდა ამისა, გიუნტერის წარმოებულების აღრიცხვა საშუალებას იძლევა მარტივად ჩავწეროთ სასაზღვრო ამოცანების შესაბამისი გრინის ფორმულები ზედაპირზე თუკი მოცემული გვაქვს ფუნდამენტური ამონახსნი. გრინის ფორმულისა და კვალების შესახებ ლემის საშუალებით მტკიცდება მაღალი რიგის კვალების არსებობა, ხოლო ლაქს-მილგრამის ლემის საშუალებით - ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა.

რაც შეეხება პოტენცილთა მეთოდს, იგი წარმოადგენს სასაზღვრო ამოცანების კვლევის მძლავრ იარაღს: ამონახსნი წარმოიდგინება ფენოვანი პოტენციალების საშუალებით, რომელთა სიმრკვრივეებიდან ნაწილი მოცემულია, ხოლო დარჩენილი წარმოადგენს ფსევდოდიფერენციალური განტოლების ამონახსნს, რომელიც ჩაწერილია არის საზღვარზე. ასეთ მიდგომას ეწოდება პოტენცილათა მეთოდი. მისი საშუალებით ხდება სასაზღვრო ამოცანის დაყვანა ექვივალენტურ განტოლებათა სისტემაზე და ხდება მიღებული განტოლების ამოხსნადობის სრული გამოკვლევა, რაც გვაძლევს საშუალებას გავაკეთოთ დასკვნები საწყისი სასაზღვრო ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობისა და ამონახსნის თვისებების შესახებ.

კვლევითი თემის აქტუალობა

სასაზღვრო ამოცანები ჰიპერზედაპირზე გამოიყენება სხვადასხვა ამოცანებში და აქვთ ბევრი პრაქტიკული გამოყენება. მაგალითისთვის, იხილეთ ჰააკის სტატია ზედაპირზე სითბოს გავრცელების შემთხვევაში, არისის სტატია ზედაპირული ნაკადის განტოლებისათვის, სიარლე და ანდერსონი & კრუშელის სტატიები აინშტაინის განტოლებისთვის, რომელიც აღწერს გრავიტაციულ ველებს ვაკუუმში, თემამი & ციანეს სტატია ნავიე-სტოქსის განტოლებებისთვის სფერულ არეზე, თ. ბუჩუკურის და რ. დუდუჩავას სტატია გარსების განტოლბაზე რომელიც მიღებულია Γ- კრებადობის გამოყენებით.

ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორი $\Delta^2 = \Delta \times \Delta$ წარმოადგენს მეოთხე რიგის ოპერატორს. ჰიპერზედაპირზე სასაზღვრო ამოცანები გვხვდება სხვადასხვა სიტუაციებში და გააჩნიათ ბევრი პრაქტიკული გამოყენება. ის გვხვდება წრფივი ელასტიურობის სხვადასხვა ამოცანებში, მაგალითად როდესაც ვეძებთ ფირფიტის მცირე გადაადგილებას, სადაც ლაპლასიანი აღწერს მემბრანის ყოფაქცევას.

კვლევის მიზნები და ამოცანები

აქ ჩვენ მოვიყვანთ იმ ძირითად შედეგებს, რომლებიც წარმოადგენს სადოქტორო ნაშრომის ძირითად თეორემებს. სასაზღვრო ამოცანების სუსტი კლასიკური დასმით განხილვისას მიღებულია შემდეგი ძირითადი თეორემები:

ვთქვათ, $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ არის ჩაკეტილი ჰიპერზედაპირის $\mathcal{S}$ გლუვი ქვეზედაპირი ევკლიდის სივრცეში $\mathbb{R}^n$ და $\Gamma = \partial\mathcal{C} \neq \emptyset$ არის მისი გლუვი საზღვარი $\partial\mathcal{C} = \Gamma$ და გაყოფილია ორ ბმულ ნაწილად $\partial\mathcal{C} = \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. ვთქვათ $\mathcal{D}_j := \partial_j - \nu_j \partial_\nu$, $j = 1, \dots, n$ არის გიუნტერის მხები წარმოებული და $\Delta_{\mathcal{C}}(t, \mathcal{D}) := \mathcal{D}_1^2 + \dots + \mathcal{D}_n^2$ არის ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორი ჰიპერზედაპირზე $\mathcal{C}$.

სასაზღვრო ამოცანები ჰიპერზედაპირებზე

თეორემა 1: განიხილება შერეული სასაზღვრო ამოცანა „ანიზოტროპული“ ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის

$$\begin{cases} \operatorname{div}_{\mathcal{C}}(A\nabla_{\mathcal{C}}u)(t) = f(t), & t \in \mathcal{C} \\ u^{+}(s) = g(s), & \Gamma_D \\ \langle \mathbf{v}_{\Gamma}(s), (A\nabla_{\mathcal{C}}u)^{+}(s)\rangle = h(s), & \Gamma_N \end{cases}$$

სადაც $A = \{a_{ij}\}$ არის მკაცრად დადებითად განსაზღვრუ-ლი $n \times n$ მატრიცი.

ჩამოყალიბებულ ამოცანას სუსტი კლასიკური დასმით

$$f \in \mathbb{H}^{-1}(\mathcal{C}), \qquad g \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma), \qquad h \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma)$$

გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $\mathbb{W}^{1}_{\#}(\mathcal{C})$ სივრცეში.

ვთქვათ, $\Delta^2 := \sum_{j,k=1}^{n} \mathcal{D}_j^2 \mathcal{D}_k^2$ არის ბი-ლაპლას-ბელტრამის ოპერატორი $\mathcal{C}$ ზედაპირზე.

თეორემა 2: ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებას სასაზღვრო პირობებით

$$\begin{cases} \Delta_{\mathcal{C}}^2 u(t) = f(t), & t \in \mathcal{C} \\ (\partial_{\mathbf{v}_{\Gamma}} u)^{+}(s) = g(s), & \Gamma \\ \partial_{\mathbf{v}_{\Gamma}} \Delta_{\mathcal{C}} u)^{+}(s) = h(s), & \Gamma \end{cases}$$

სუსტი კლასიკური დასმით

$$u \in \mathbb{H}^2(\mathcal{C}), \quad f \in \mathbb{H}_{\Gamma}^{-2}\mathcal{C}), \quad g \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma), \quad h \in \mathbb{H}^{-3/2}(\Gamma),$$

გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $\mathbb{H}^{2}_{\#}(\mathcal{C})$ სივრცეში.

ვთქვათ $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ არის ჩაკეტილი ჰიპერზედაპირის $\mathcal{S}$ გლუვი ქვეზედაპირი ევკლიდის სივრცეში $\mathbb{R}^n$ და მისი საზღვარი $\partial\mathcal{C} = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \neq \varnothing$ გაყოფილია ორ თანაუკვეთ ნაწილად.

თეორემა 3: ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებას შერეული სასაზღვრო პირობებით

$$\begin{cases} \Delta_{\mathcal{C}}^2 u(t) = f(t), & t \in \mathcal{C} \\ (u)^+(s) = g_1(s), & \Gamma_1 \\ (\partial_{\mathbf{v}_\Gamma} u)^+(s) = g_2(s), & \Gamma_2 \\ (\Delta_{\mathcal{C}} u)^+(s) = h_1(s), & \Gamma_1 \\ \partial_{\mathbf{v}_\Gamma} \Delta_{\mathcal{C}} u)^+(s) = h_2(s), & \Gamma_2 \end{cases}$$

სუსტი კლასიკური დასმით

$$u \in \mathbb{H}^2(\mathcal{C}), \quad f \in \widetilde{\mathbb{H}}_\Gamma^{-2}(\mathcal{C}), \quad g_1 \in \mathbb{H}^{3/2}(\Gamma_1),$$

$$g_2 \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_2), \quad h_1 \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_1), \quad h_2 \in \mathbb{H}^{-3/2}(\Gamma_2).$$

გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $\mathbb{H}_\#^2(\mathcal{C})$ სივრცეში.

სასაზღვრო ამოცანების არაკლასიკური დასმით განხილვისას მიღებულია შემდეგი ძირითადი თეორემები:

ვთქვათ $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ არის რაიმე გლუვი ჩაკეტილი ორიენტი-რებული ზედაპირი, რომელიც ესაზღვრება შიგა Ω^+ და გარე $\Omega^- := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^+}$ არეებს. $\mathcal{C}$-თი აღვნიშნოთ $\mathcal{S}$-ს ქვეზედაპირი, რომელსაც აქვს ორი სახე $\mathcal{C}^-$ და $\mathcal{C}^+$ და აქვს იგივე ორიენტაცია, რაც $\mathcal{S}$-ს: $\mathcal{C}^+$ ესაზღვრება შიდა Ω^+ არეს და $\mathcal{C}^-$ ესაზღვრება გარე Ω^- არეს. $\mathcal{C}$-ს აქვს გლუვი საზღვარი $\Gamma := \partial\mathcal{C}$, რომელიც გაყოფილია ორ ნაწილად $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ და თითოეული შედგება სასრული რაოდენობა გლუვი თანაუკვეთი წირებისაგან.

განვიხილოთ შერეული სასაზღვრო ამოცანა ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის

სასაზღვრო ამოცანები ჰიპერზედაპირებზე

$$\begin{cases} \Delta_{\mathcal{C}} u(t) - u(t) = f(t), & t \in \mathcal{C}, \\ u^{+}(\tau) = g(\tau), & \tau \in \Gamma_D, \\ (\partial_{\nu_\Gamma} u)^{+}(\tau) = h(\tau), & \tau \in \Gamma_N. \end{cases} \tag{1}$$

შემდეგი არაკლასიკური დასმით

$$u \in \mathbb{W}^{s}_{p,\#}(\mathcal{C}), \quad f \in \mathbb{H}^{s-2}_{p}(\mathcal{C}) \cap \mathbb{H}^{-1}_{0}(\mathcal{C}), \quad g \in \mathbb{W}^{s-1/p}_{p,\#}(\Gamma_D),$$

$$h \in \mathbb{W}^{s-1-1/p}_{p,\#}(\Gamma_N), \quad 1 < p < \infty, \quad s > \frac{1}{p} \tag{2}$$

თეორემა 4: ვთქვათ $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} < s < 1 + \frac{1}{p}$. სასაზღვრო ამოცანა (1) არის ფრედჰოლმის არაკლასიკური დასმით (2) მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ

$$\sin \pi \left(\frac{2}{p} - s - i\xi \right) \neq \pm 1, \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

რომელიც ექვივალენტურია შემდეგი პირობის

$$s - \frac{2}{p} \neq \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$$

(c) შერეული სასაზღვრო ამოცანა არის ცალსახად ამოხსნადი (2) არაკლასიკური დასმით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ:

$$-\frac{1}{2} < s - \frac{2}{p} < \frac{1}{2}.$$

თეორემა 5: ვთქვათ (2) პირობები სრულდება, $g_0 \in \mathbb{W}^{s-1/p}_{p,\#}(\Gamma)$, $h_0 \in \mathbb{W}^{s-1-1/p}_{p,\#}(\Gamma)$ არიან სასაზღვრო მნიშვნელობების

$g \in \mathbb{W}^{s-1/p}_{p,\#}(\Gamma_D)$ და $h \in \mathbb{W}^{s-1-1/p}_{p,\#}(\Gamma_N)$ რაიმე ფიქსირებული გაგრძელებები შესაბამისად $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ საზღვრის ნაწილებზე:

a). მაშინ (1) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი წარმოიდგინება ფორმულით

$$u(x) = \mathbf{N}_{\mathcal{C}} f(x) + \mathbf{W}_\Gamma(g_0 + \varphi_0)(x) - \mathbf{V}_\Gamma(h_0 + \psi_0)(x), \quad x \in \mathcal{C}.$$

აქ $\mathbf{N}_{\mathcal{C}}$, $\mathbf{W}_\Gamma$ და $\mathbf{V}_\Gamma$ არიან ნიუტონის, ორმაგი და მარტივი ფენის პოტენციალები და φ_0, ψ_0 წარმოადგენენ შემდეგი სასაზღვრო ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებს

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\varphi_0 - r_N \mathbf{W}_{\Gamma,0}\varphi_0 + r_N \mathbf{V}_{\Gamma,-1}\psi_0 = G_0, \quad \Gamma_N, \\ \frac{1}{2}\psi_0 + r_D \mathbf{W}^*_{\Gamma,0}\psi_0 - r_D \mathbf{V}_{\Gamma,+1}\varphi_0 = H_0, \quad \Gamma_D \end{cases} \tag{3}$$

$$\varphi_0 \in \mathbb{W}^r_{p,\#}(\Gamma_N), \quad \psi_0 \in \mathbb{W}^{r-1}_{p,\#}(\Gamma_D),$$
$$G_0 \in \mathbb{W}^r_{p,loc}(\Gamma_N), \quad H_0 \in \mathbb{W}^{r-1}_{p,loc}(\Gamma_D),$$

სადაც $\{r = s - 1/p\}$ და G_0 და H_0 არიან f, g_0 და h_0 ტერმინებით მოცემული ფუნქციები.

b). პირიქითაც: თუ u არის (1) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი (2) დასმით, მაშინ $\varphi_0 := r_{\Gamma_D}(u^+ - g_0)$ და $\psi_0 := r_{\Gamma_N}((\partial_\nu u)^+ - h_0)$ არიან (3) სისტემის ამონახსნები.

c). (3) განტოლებათა სისტემას გააჩნია ამონახსნთა ერთადერთი $\varphi_0 \in \mathbb{W}^{1/2}_{\#}(\Gamma_N)$ და $\psi_0 \in \mathbb{W}^{-1/2}_{\#}(\Gamma_D)$ წყვილი სუსტი კლასიკური დასმით $p = 2$, $s = 1$-სთვის.

არაკლასიკური დასმით განხილვისას, ასევე შესწავლილია შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა ბი-ლაპლას-ბელტრამის განტოლებისათვის

სასაზღვრო ამოცანები ჰიპერზედაპირებზე

$$\begin{cases} \Delta^2_{\mathcal{C}} u(t) - u(t) = f(t), & t \in \mathcal{C}, \\ u^+(s) = g(s), & s \in \Gamma, \\ (\partial_{\nu_\Gamma} u)^+(s) = h(s), & s \in \Gamma. \end{cases} \qquad (4)$$

შემდეგი არაკლასიკური დასმით:

$$u \in \mathbb{H}^s_{p,\#}(\mathcal{C}), \quad f \in \mathbb{H}^{s-4}_p(\mathcal{C}) \cap \mathbb{H}^{-2}_0(\mathcal{C}), \quad g \in \mathbb{H}^{s-1/p}_{p,\#}(\Gamma),$$

$$h \in \mathbb{H}^{s-1-1/p}_{p,\#}(\Gamma), \quad 1 < p < \infty, \quad s > \frac{1}{p} \qquad (5)$$

თეორემა 6: ვთქვათ შესრულებულია: (5) პირობები.

a). მაშინ (4) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი წარმოიდგენა ფორმულით

$$u(x) = \mathbf{N}_{\mathcal{C}} f(x) + \mathbf{W}_{(0,\Gamma)} g(x) - \mathbf{W}_{(-1,\Gamma)} h(x) + \mathbf{W}_{(-2,\Gamma)} \varphi(x) - \mathbf{W}_{(-3,\Gamma)} \psi(x)$$

$$u \in \mathbb{H}^2_{\#}(\mathcal{C}), \qquad x \in \mathcal{C}.$$

აქ $\mathbf{N}_{\mathcal{C}}$, $\mathbf{W}_{(j,\Gamma)}$, $j = \overline{-3,1}$ წარმოადგენენ ნიუტონის და ფენოვან პოტენციალებს და φ და ψ არიან შემდეგი სასაზღვრო ფსევდო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნები

$$\begin{cases} \mathbf{V}^0_{(-2,\Gamma)} \varphi - \mathbf{V}^0_{(-3,\Gamma)} \psi = G, & \Gamma, \\ \mathbf{V}^1_{(-1,\Gamma)} \varphi - \mathbf{V}^1_{(-2,\Gamma)} \psi = H, & \Gamma \end{cases} \qquad (6)$$

$$\varphi \in \mathbb{H}^r_{p,\#}(\Gamma), \quad \psi \in \mathbb{H}^{r-1}_{p,\#}(\Gamma), \quad G \in \mathbb{H}^r_{p,\#}(\Gamma), \quad H \in \mathbb{H}^{r-1}_{p,\#}(\Gamma)$$

სადაც $\{ r = s - 1/p$, G და H არიან მოცემული ფუნქციები, ჩაწერილი f, g და h-ის საშუალებით.

b). პირიქითაც: თუ u არის (4) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი (5) დასმით, მაშინ $\varphi := u^+$, $\psi := (\partial_\nu u)^+$ წარმოადგენენ (6) განტოლებათა სისტემის ამონახსნს.

c). (6) სასაზღვრო ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას გააჩნია ამონახსნების ერთადერთი წყვილი $\varphi \in \mathbb{W}^{3/2}(\Gamma)$ და $\psi \in \mathbb{W}^{1/2}(\Gamma)$ სუსტი კლასიკური დასმით $p = 2$ და $s = 2$ -სთვის.

განვიხილოთ მოდელური შერეული სასაზღვრო ამოცანა ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის კუთხოვან არეში

$$\begin{cases} \Delta u(t) - k^2 u(t) = f(t), & t \in \Omega_\alpha, \\ u^+(s) = g(s), & s \in \mathbb{R}^+, \\ (\partial_{\nu_\Gamma} u)^+(s) = h(s), & s \in \mathbb{R}_\alpha, \end{cases} \tag{7}$$

შემდეგი არაკლასიკური დასმით

$$u \in \mathbb{H}_p^s(\Omega_\alpha), \quad f \in \mathbb{H}_p^{s-2}(\Omega_\alpha) \cap \mathbb{H}_0^{-1}(\Omega_\alpha), \quad g \in \mathbb{H}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^+),$$

$$h \in \mathbb{H}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}_\alpha), \qquad 1 < p < \infty, \quad \frac{1}{p} < s < 1 + \frac{1}{p} \tag{8}$$

თეორემა 7: ვთქვათ $\alpha \in (0, 2\pi)$, $1 < p < \infty$ და $\frac{1}{p} < s < 1 + \frac{1}{p}$.

შერეული სასაზღვრო (7) ამოცანა არის ფრედჰოლმის არაკლასიკური (8) დასმით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ:

$$\sin^2 \pi\left(\frac{2}{p} - s - i\xi\right) - \cos^2(\pi - \alpha)\left(\frac{2}{p} - s - i\xi\right) \neq 0$$

რომელიც ექვივალენტურია შემდეგი პირობის

$$\alpha\left(s - \frac{2}{p}\right) \neq \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi.$$

კერძოდ, (7) სასაზღვრო ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი ნებისმიერი $0 < \alpha < 2\pi$ -თვის არაკლასიკური (8) დასმით, თუ:

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha\left(s - \frac{2}{p}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

თეორემა 8: ვთქვათ $1 < p < \infty$ და $\frac{1}{p} < s < 1 + \frac{1}{p}$. ვთქვათ $g_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1/p}(\Gamma_\alpha)$ და $h_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\Gamma_\alpha)$ არიან $g \in \mathbb{W}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}_\alpha)$ და $h \in \mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}^+)$ სასაზღვრო პირობების რაიმე ფიქსირებული გაგრძელება, რომლებიც თავიდან განსაზღვრული იყვნენ Γ_α საზღვრის $\mathbb{R}_\alpha$ და $\mathbb{R}^+$ ქვესიმრავლეზე მხოლოდ.

a). (7) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი წარმოიდგინება ფორმულით

$$u(x) = \mathbf{N}_{\mathcal{C}} f(x) + \mathbf{W}_\Gamma(g_0 + \varphi_0)(x) - \mathbf{V}_\Gamma(h_0 + \psi_0)(x), \quad x \in \Omega_\alpha, \quad (9)$$

სადაც φ_0 და ψ_0 არიან შემდეგი ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნები

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\varphi_0(t) + r_{\mathbb{R}^+}\mathbf{V}_{\Delta+k^2,-1}\psi_0(t) = G_+(t), & t \in \mathbb{R}^+ \\ \frac{1}{2}\psi_0(t) - r_{\mathbb{R}_\alpha}\mathbf{V}_{\Delta+k^2,+1}\varphi_0(t) = H_-(t) & t \in \mathbb{R}_\alpha, \end{cases} \quad (10)$$

$$\varphi_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^+), \qquad \psi_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}_\alpha),$$

$$G_+ := r_{\mathbb{R}^+}G_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^+), \qquad H_- = r_{\mathbb{R}_\alpha}H_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}_\alpha)$$

b). პირიქითაც: თუ $\varphi_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^+)$, $\psi_0 \in \mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}_\alpha)$ წყვილი წარმოადგენს (10) სისტემის ამონახსნს, მაშინ (9) ტოლობაში მოცემული $u(x)$ ფუნქცია არის (7) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი და $u^+ = g_0 + \varphi_0$, $(\partial_\nu u)^+ = h_0 + \psi_0$.

c). ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა (10) სისტემას გააჩნია ამონახსნთა ერთადერთი წყვილი $\varphi_0 \in \mathbb{W}^{1/2}(\mathbb{R}^+) \cap \mathbb{H}^{1/2}(\mathbb{R}^+)$ და

$\psi_0 \in \mathbb{W}^{-1/2}(\mathbb{R}_\alpha) \cap \mathbb{H}^{-1/2}(\mathbb{R}_\alpha)$ სუსტი კლასიკური დასმით $p = 2$, $s = 1$.

„The University of Georgia“

School of Science and Technology

Doctoral Program: Mathematics

Medea Tsaava

Boundary Value Problems for Eliptic Equations on Hupersurfaces with the Lipschitz Boundary

Dissertation Herald

Tbilisi

2021

სასაზღვრო ამოცანები ჰიპერზედაპირებზე

General description

The problems, which are considered in the dissertation, have one of the most important place in the investigation of the partial differential equations.

In the dissertation it is investigated solvability and uniqueness of boundary value problems for high-order partial differential equations in both classical and non-classical setting on a hypersurface. In particular, it is considered existence and unique\-ness of a solution of ordinary and mixed boundary value problems for the “anisotropic” Lap\-lace-Beltrami and bi-Laplace-Beltrami equations in the classical set\-ting in the Bessel Potential $\mathbb{H}^1_2(\mathcal{C})$ space on a smooth $\mathcal{C}$ hypersurface with smooth $\Gamma=\partial\mathcal{C}$ boundary.

For the formulation of boundary value problems, we have used the Gunter’s derivatives, which allows to write Laplace-Beltrami and bi-Laplace-Beltrami operators in a simple form, respectively. It is proved the invertibility of the perturbed “anisotropic” Lap\-lace-Beltrami operator $\mathrm{div}_{\mathcal{S}}(A\nabla_{\mathcal{S}})+\mathcal{H}I:\mathbb{H}^s_p(\mathcal{S})\to\mathbb{H}^{s-2}_p(\mathcal{S})$, where $A(x)$ is an $n\times n$ bounded measurable positive definite matrix function, $\mathcal{H}$ is smooth function, has non-negative real part $\mathrm{Re}\mathcal{H}(t)\geqslant 0$ for all $t\in\mathcal{S}$ and $\mathrm{messupp}\,\mathrm{Re}\mathcal{H}\neq 0$. The same results are obtained for the perturbed bi-Laplace-Beltrami operator $\Delta^2_{\mathcal{S}}+\mathcal{H}I:\mathbb{H}^s_p(\mathcal{S})\to\mathbb{H}^{s-4}_p(\mathcal{S})$. Here, $\mathcal{S}$ is a hypersurface without boundary for arbitrary $1<p<\infty$ and $-\infty<s<\infty$. Moreover, the existence of the fundamental solution to the operators $\mathrm{div}_{\mathcal{S}}(A\nabla_{\mathcal{S}})$ and $\Delta^2_{\mathcal{S}}$ are proved, which are understood at the existence of inverses to these operators in the settings $\mathbb{H}^s_{p,\#}(\mathcal{S})\to\mathbb{H}^{s-2}_{p,\#}(\mathcal{S})$ and $\mathbb{H}^s_{p,\#}(\mathcal{S})\to\mathbb{H}^{s-4}_{p,\#}(\mathcal{S})$, where $\mathbb{H}^s_{p,\#}(\mathcal{S})$ is a subspace of the Bessel potential space and consists of functions with mean value zero. The unique solvability of the BVP is proved, based upon the Green formulae, Lemma about traces and Lax-Milgram Lemma. Using the Gunter’s derivative, Green’s formulae were written simply for the bi-Laplace-Beltrami operator on a hypersurface. Existence of the high order traces for the solution of the boundary value problems is proved by using of the Lemma about traces by prof. R. Duduchava and the Green formula.

There are considered existence and uniqueness of the solution of ordinary and mixed boundary value problems for the Laplace-Beltrami and bi-Laplace-Beltrami equations in the non-classical setting in the Bessel potential $\mathbb{H}^s_p(\mathcal{C})$ and the Sobolev-Slobodeckii $\mathbb{W}^s_p(\mathcal{C})$ spaces on a smooth $\mathcal{C}$ hypersurface with smooth $\Gamma = \partial\mathcal{C}$ boundary and the mixed boundary value problem for the Helmholtz equation in a planar angle $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ of magnitude α.

One of the problem we encounter in considering BVPs was the existence of a fundamental solution for the Laplace-Beltrami and bi-Laplace-Beltrami operators. Invertibility of those operators are proved in the Bessel potential spaces without constants. The established invertibility implies the existence of the fundamental solution, which can be used to define the Newton and layer potentials and the potential methods, respectively. For the investigation of the mixed Dirichlet-Neumann boundary value problem for the Laplace-Beltrami equation we apply a quasi-localization and obtain the model BVP for the Laplacian. The model mixed BVP on the half plane is investigated by the potential method and is reduced to an equivalent system of Mellin convolution equations in the Sobolev-Slobodeckii space. Boundary integral equations are investigated in both the Bessel potential and the Sobolev-Slobodeckii spaces. The symbol of the obtained system is written explicitly and is responsible for the solvability, Fredholm properties and the index of the system. An explicit criterion for the unique solvability of the initial BVP in the non-classical setting is derived as well. Analogously, for the investigation of the boundary value problem for the bi-Laplace-Beltrami equation we apply a quasi-localization and obtain the model BVP for the bi-Laplacian. The model BVP on the half plane is investigated by the potential method and is reduced to an equivalent system of Cauchy type integral equations in the Bessel potential spaces.

The model mixed boundary value problem for the Helmholtz equation is considered in the non-classical setting, where a solution is sought in the Bessel potential spaces $\mathbb{H}^s_p(\Omega_\alpha)$, $s > 1/p$, $1 < p < \infty$.

The problem is investigated using the potential method by reducing them to an equivalent boundary integral equation (BIE) in the Sobolev-Slobodeckii space on a semi-infinite axes $\mathbb{W}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^+)$, which is of Mellin convolution type. By applying the recent results on Mellin convolution equations in the Bessel potential spaces obtained by V. Didenko & R. Duduchava, explicit conditions of the unique solvability of this BIE in the Sobolev-Slobodeckii $\mathbb{W}_p^r(\mathbb{R}^+)$ and Bessel potential $\mathbb{H}_p^r(\mathbb{R}^+)$ spaces for arbitrary r are found and used to write explicit conditions for the Fredholm property and unique solvability of the initial model BVPs for the Helmholtz equation in the above mentioned non-classical setting.

The thesis contains the following chapters:

1) Preliminaries;
2) Existence and uniqueness of the solution for the Laplace-Beltrami and bi-Laplace-Beltrami equations with ordinary and mixed boundary value problems on a hypersurface in the $\mathbb{H}_2^1(\mathcal{C})$ space;
3) Existence and uniqueness of the solution for the Laplace-Beltrami and bi-Laplace-Beltrami equations with mixed boundary value problems on a hypersurface in the $\mathbb{H}_p^s(\mathcal{C})$ space;
4) Existence and uniqueness of the solution for the Helmholtz equation in a planar angular domain $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ of magnitude α

and it is used the following publications:

• R. Duduchava, M. Tsaava, T. Tsutsunava, „Mixed Boundary Value Problem on Hyper\-sur\-faces“, International Journal of Differential Equations, 2014, 1-8.

• M. Tsaava, „The boundary Value Problems for the Bi-Laplace-Beltrami Equa\-tion“, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, Vol: 77, 2019, 93-103.

• R. Duducava, M. Tsaava, „Mixed Boundary Value Problems for the Laplace-Beltrami Equation“, Complex Variables and Elliptic Equations, Vol: 63, 2018, 1468-1496.

• M. Tsaava, „Bi-Laplace-Beltrami Equation on a Hypersurface“, Transactions of A. Razma\-dze Mathematical Institute, Vol: 173, (2019), 3, 147-157.

• R. Duduchava, M. Tsaava, „Mixed Boundary Value Problems for the Helmholtz Equation in a Model 2D angular Domain“, Georgian Mathematical Journal, Vol: 27, 2, 2020, 211–231.

• T. Buchukuri, R. Duduchava, D. Kapanadze, M. Tsaava, „Localization of a Helmholtz boun-da-ry value problem in a domain with piecewise-smooth boundary“, Proceedings of A. Razmadze Mathematical institute, Vol: 162, 37-44, 2013.

Novelty and uniqueness of the research

Many problems in the Mathematical Physics, such as cracks in an elastic media, scattering of electromagnetic waves by surfaces with the non-smooth boundary etc. lead us to boundary value problems (BVPs) for elliptic partial differential equations in domains and hypersurfaces with angular points on the boundary (so called domains and hypersurfaces with the Lipschitz boundary). By applying the localization, the problems are reduced to an equivalent model problem in plane angles, domain between two rays emerging from the origin and having non-zero angle between them. The model BVPs are investigated using the potential method by reducing them to an equivalent boundary integral equation which is of Mellin convolution type with meromorphic kernel. Received equations are investigated thoroughly and allow us do draw conclusions about solutions to the initial boundary value problem and their properties.

The problems solved in the present dissertation are of big importance for Mathematical Physics. The tools we apply for the study have been designed in a great deal during the last decade by professors Duduchava and Didenko and is based on their investigation of Mellin convolution operators. Using this technique, we have proved the existence and uniqueness of the solution for the Laplace-Beltrami and bi-Laplace-Beltrami equation in the non-classical setting.

One of the difficulties we encounter in considering BVPs on hypersurfaces was the existence of a fundamental solution for the Laplace-Beltrami and bi-Laplace-Beltrami operators on a hypersurface. An essential difference between differential operators on hypersurfaces and the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ lies in the existence of fundamental solution: In $\mathbb{R}^n$ fundamental solution exists for all elliptic partial differential operators with constant coefficients if it is not trivially zero. On a hypersurface even Laplace-Beltrami $\Delta_{\mathcal{C}} : \mathbb{H}^s_p(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-2}_p(\mathcal{S})$ and bi-Laplace-Beltrami $\Delta^2_{\mathcal{C}} : \mathbb{H}^{s+2}_p(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-2}_p(\mathcal{S})$ operators have not a fundamental solution because they have a non-trivial kernels (are not inveritble), which consist of constants in all Bessel potential spaces. Therefore we consider Laplace-Beltrami and bi-Laplace-Beltrami operators in spaces with mean value zero (with detached constants) $\Delta_{\mathcal{C}} : \mathbb{H}^s_{p,\#}(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-2}_{p,\#}(\mathcal{S})$ and $\Delta^2_{\mathcal{C}} : \mathbb{H}^{s+2}_{p,\#}(\mathcal{S}) \to \mathbb{H}^{s-2}_{p,\#}(\mathcal{S})$ for all $1 < p < \infty$ and $s \in \mathbb{R}$ and prove that they are invertible operators in such settings. The established invertibility implies the existence of the certain fundamental solution, which is interpreted as the inverse operator or the Hoermander's kernel of the inverse operator and can be used to introduce the volume (Newtonian) and layer potentials.

Research methodology

The PhD Thesis is a theoretical nature, where it is considered the existence and uniqueness of a solution for high-order partial differential equations in both weak classical and non-classical setting on a hypersurface. For the formulation of boundary value problems, we use the Gunter's derivatives and to solve the problems, we use Lax-Millgram

Lemma in the weak classical setting and potential method in the non-classical setting.

The advantage of the method based on the Gunter's derivatives is a simple formulation of the operator. In addition, Gunter's derivatives allow us to write easily the Green's formulae for the BVP's on a surface if have given a fundamental solution. By using the Green's formulae and the Lemma about traces, we will prove the existence of a high order traces and by using the Lax-Millgram lemma we will prove the existence and uniqueness of the solution.

The potential method is a powerful tool for the investigation of BVP's: the solution is represented by the layer potentials, some of the densities of which are given and the remainder is a solution of the pseudodifferential equation. Such an approach is called the potential method. It allows to reduce Boundary Value Problem to an equivalent boundary integral equation, which is investigated thoroughly. This enables us to draw conclusions about unique solvability of the initial BVP and make conclusions about the properties of a solution.

Research Actuality

BVPs on hypersurfaces arise in a variety of situations and have many practical applications. See, for example, W. Haack's article about the heat conduction by surfaces, R. Aris's article about the equations of surface flow, P.G. Ciarlet's and L. Andersson & P.T. Chrusciel's articles about the vacuum Einstein equations describing gravitational fields, R. Temam & M. Ziane's about for the Navier-Stokes equations on spherical domains, T. Buchukuri & R. Duduchava's article on equations for shells derived by the Γ-convergence.

BVPs for Bi-Laplace-Beltrami operator $\Delta^2 = \Delta \times \Delta$ is a model of a fourth-order operator. BVPs on hypersurfaces arise in a variety of practical and engineering and have many practical applications. They emerge in various problems of linear elasticity, for example when looking at small displacements of a plate, whereas the Laplace equation describes the behavior of a membrane.

Research goals and objectives

Here we present the main results that represent the basic theorems of the PhD dissertation. In the weak classical setting the following main theorems are accepted:

Let $\mathcal{C}\subset\mathcal{S}$ be a smooth subsurface of a closed hypersurface $\mathcal{S}$ in the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ and $\Gamma=\partial\mathcal{C}\neq\emptyset$ be its smooth boundary $\partial\mathcal{C}=\Gamma$ and is decomposed into two connected parts $\partial\mathcal{C}=\Gamma=\Gamma_D\cup\Gamma_N$. Let $\mathcal{D}_j:=\partial_j-\nu_j\partial_\nu$, $j=1,\dots,n$ be G\"unter's tangential derivatives, and $\Delta_{\mathcal{C}}(t,\mathcal{D}):=\mathcal{D}_1^2+\cdots+\mathcal{D}_n^2$ be the laplace-Beltrami operator to the hypersurface $\mathcal{C}$.

Theorem 1: The ”anisotropic” Laplace-Beltrami equation with mixed boundary conditions

$$\begin{cases} \operatorname{div}_{\mathcal{C}}(A\nabla_{\mathcal{C}}u)(t)=f(t), & t\in\mathcal{C}\\ u^+(s)=g(s), & \Gamma_D\\ \langle\mathbf{v}_\Gamma(s),(A\nabla_{\mathcal{C}}u)^+(s)\rangle=h(s), & \Gamma_N\end{cases}$$

where $A=\{a_{ij}\}$ is an $n\times n$-ზე strictly positive definite matrix, in the weak classical setting

$$f\in\mathbb{H}^{-1}(\mathcal{C}),\qquad g\in\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma),\qquad h\in\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma)$$

has a unique solution in the space $\mathbb{W}^1_{\#}(\mathcal{C})$.

Let $\mathcal{C}\subset\mathcal{S}$ be a smooth subsurface of a closed hypersurface $\mathcal{S}$ in the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ and $\Gamma=\partial\mathcal{C}\neq\emptyset$ be its smooth boundary $\partial\mathcal{C}=\Gamma$. Let $\mathcal{D}_j:=\partial_j-\nu_j\partial_\nu$, $j=1,\dots,n$ be G\"unter's tangential derivatives, and $\Delta^2 := \sum_{j,k=1}^{n} \mathcal{D}_j^2 \mathcal{D}_k^2$ be the bi-laplace-Beltrami operator to the hypersurface $\mathcal{C}$.

Theorem 2: The bi-Laplace-Beltrami equation with boundary conditions

$$\begin{cases} \Delta_{\mathcal{C}}^2 u(t) = f(t), & t \in \mathcal{C} \\ (\partial_{\mathbf{v}_\Gamma} u)^+(s) = g(s), & \Gamma \\ \partial_{\mathbf{v}_\Gamma} \Delta_{\mathcal{C}} u)^+(s) = h(s), & \Gamma \end{cases}$$

in the weak classical setting

$$u \in \mathbb{H}^2(\mathcal{C}), \quad f \in \overset{-2}{\mathbb{H}_\Gamma} \mathcal{C}), \quad g \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma), \quad h \in \mathbb{H}^{-3/2}(\Gamma),$$

has a unique solution in the space $\mathbb{H}_{\#}^2(\mathcal{C})$.

Let $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ be a smooth subsurface of a closed hypersurface $\mathcal{S}$ in the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ and its boundary $\partial\mathcal{C} = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \neq \varnothing$ is decomposed into two connected parts.

Theorem 3: The bi-Laplace-Beltrami equation with mixed boundary conditions

$$\begin{cases} \Delta_{\mathcal{C}}^2 u(t) = f(t), & t \in \mathcal{C} \\ (u)^+(s) = g_1(s), & \Gamma_1 \\ (\partial_{\mathbf{v}_\Gamma} u)^+(s) = g_2(s), & \Gamma_2 \\ (\Delta_{\mathcal{C}} u)^+(s) = h_1(s), & \Gamma_1 \\ \partial_{\mathbf{v}_\Gamma} \Delta_{\mathcal{C}} u)^+(s) = h_2(s), & \Gamma_2 \end{cases}$$

in the weak classical setting

$$u \in \mathbb{H}^2(\mathcal{C}), \quad f \in \overset{-2}{\mathbb{H}_\Gamma}(\mathcal{C}), \quad g_1 \in \mathbb{H}^{3/2}(\Gamma_1),$$

$$g_2 \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_2), \quad h_1 \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_1), \quad h_2 \in \mathbb{H}^{-3/2}(\Gamma_2).$$

has a unique solution in the space $\mathbb{H}^2_{\#}(\mathcal{C})$.

In the non-classical setting the following main theorems are accepted:

Let $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ be some smooth closed orientable surface, bordering a compact inner Ω^+ and and outer $\Omega^- := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^+}$ domain. By $\mathcal{C}$ we denote a subsurface of $\mathcal{S}$, which has two faces $\mathcal{C}^-$ and $\mathcal{C}^+$ and inherits the orientation from $\mathcal{S}$: $\mathcal{C}^+$ borders the inner domain Ω^+ and $\mathcal{C}^-$ borders the outer domain Ω^-. $\mathcal{C}$ has the smooth boundary $\Gamma := \partial\mathcal{C}$, which is decomposed into two closed parts $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, each consisting of a finite number of smooth non-intersecting arcs.

Consider the mixed boundary value problem for the Laplace-Beltrami equation

$$\begin{cases} \Delta_{\mathcal{C}} u(t) - u(t) = f(t), & t \in \mathcal{C}, \\ u^+(\tau) = g(\tau), & \tau \in \Gamma_D, \\ (\partial_{\nu_\Gamma} u)^+(\tau) = h(\tau), & \tau \in \Gamma_N. \end{cases} \tag{1}$$

In the non-classical setting

$$u \in \mathbb{W}^s_{p,\#}(\mathcal{C}), \quad f \in \mathbb{H}^{s-2}_p(\mathcal{C}) \cap \overset{-1}{\mathbb{H}_0}(\mathcal{C}), \quad g \in \mathbb{W}^{s-1/p}_{p,\#}(\Gamma_D),$$

$$h \in \mathbb{W}^{s-1-1/p}_{p,\#}(\Gamma_N), \quad 1 < p < \infty, \quad s > \frac{1}{p} \tag{2}$$

Theorem 4: Let $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} < s < 1 + \frac{1}{p}$. The BVP (1) is Fredholm in the non-classical setting (2) if and only if

$$\sin \pi \left(\frac{2}{p} - s - i\xi \right) \neq \pm 1, \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

or, equivalently,

$$s-\frac{2}{p}\neq\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2}$$

The model mixed BVP (1) is uniquely solvable in the non-classical setting (2) if and only if:

$$-\frac{1}{2}<s-\frac{2}{p}<\frac{1}{2}.$$

Theorem 5: Let condition (2) holds, $g_0\in\mathbb{W}^{s-1/p}_{p,\#}(\Gamma)$, $h_0\in\mathbb{W}^{s-1-1/p}_{p,\#}(\Gamma)$ be some fixed extensions of the boundary data $g\in\mathbb{W}^{s-1/p}_{p,\#}(\Gamma_D)$ and $h\in\mathbb{W}^{s-1-1/p}_{p,\#}(\Gamma_N)$ respectively initially defined on the parts of the boundary $\Gamma=\Gamma_D\cup\Gamma_N$:

a). Then a solution to the BVP (1) is represented by the formula

$$u(x)=\mathbf{N}_{\mathcal{C}}f(x)+\mathbf{W}_{\Gamma}(g_0+\varphi_0)(x)-\mathbf{V}_{\Gamma}(h_0+\psi_0)(x),\quad x\in\mathcal{C}.$$

Here $\mathbf{N}_{\mathcal{C}}$, $\mathbf{W}_{\Gamma}$ და $\mathbf{V}_{\Gamma}$ are the Newton's, double and single layer potentials and φ_0, ψ_0 are solutions to the following system of boundary pseudodifferential equations

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\varphi_0-r_N\mathbf{W}_{\Gamma,0}\varphi_0+r_N\mathbf{V}_{\Gamma,-1}\psi_0=G_0, & \Gamma_N,\\ \dfrac{1}{2}\psi_0+r_D\mathbf{W}^*_{\Gamma,0}\psi_0-r_D\mathbf{V}_{\Gamma,+1}\varphi_0=H_0, & \Gamma_D\end{cases}\tag{3}$$

$$\varphi_0\in\mathbb{W}^{r}_{p,\#}(\Gamma_N),\quad \psi_0\in\mathbb{W}^{r-1}_{p,\#}(\Gamma_D),$$
$$G_0\in\mathbb{W}^{r}_{p,\#}(\Gamma_N),\quad H_0\in\mathbb{W}^{r-1}_{p,\#}(\Gamma_D),$$

where $\{r=s-1/p\}$ and G_0 and H_0 are functions given in terms of f, g_0 and h_0.

b). Vice versa: if u is a solution to the BVP (1) in the setting (2), then $\varphi_0 := r_{\Gamma_D}(u^+ - g_0)$ and $\psi_0 := r_{\Gamma_N}((\partial_\nu u)^+ - h_0)$ are solutions to the system (3).

c). The system of equations (3) has a unique pair of solutions $\varphi_0 \in \mathbb{W}^{1/2}_{\#}(\Gamma_N)$ in the classical setting for $p = 2$, $s = 1$.

Consider the BVP for the bi-Laplace-Beltrami Equation

$$\begin{cases} \Delta^2_{\mathcal{C}} u(t) - u(t) = f(t), & t \in \mathcal{C}, \\ u^+(s) = g(s), & s \in \Gamma, \\ (\partial_{\nu_\Gamma} u)^+(s) = h(s), & s \in \Gamma. \end{cases} \tag{4}$$

in the following non-classical setting:

$$u \in \mathbb{H}^s_{p,\#}(\mathcal{C}), \quad f \in \mathbb{H}^{s-4}_p(\mathcal{C}) \cap \mathbb{H}^{-2}_0(\mathcal{C}), \quad g \in \mathbb{H}^{s-1/p}_{p,\#}(\Gamma),$$
$$h \in \mathbb{H}^{s-1-1/p}_{p,\#}(\Gamma), \quad 1 < p < \infty, \quad s > \frac{1}{p} \tag{5}$$

Theorem 6: Let the condition (5) holds:

a). Then a solution to the BVP (4) is represented by the formula

$$u(x) = \mathbf{N}_{\mathcal{C}} f(x) + \mathbf{W}_{(0,\Gamma)} g(x) - \mathbf{W}_{(-1,\Gamma)} h(x) + \mathbf{W}_{(-2,\Gamma)} \varphi(x) - \mathbf{W}_{(-3,\Gamma)} \psi(x)$$
$$u \in \mathbb{H}^2_{\#}(\mathcal{C}), \qquad x \in \mathcal{C}.$$

Here $\mathbf{N}_{\mathcal{C}}$, $\mathbf{W}_{(j,\Gamma)}$, $j = \overline{-3,1}$ are the Newton's and layer potentials and φ and ψ are solutions to the following system of boundary pseudodifferential equations

$$\begin{cases} \mathbf{V}^0_{(-2,\Gamma)}\varphi - \mathbf{V}^0_{(-3,\Gamma)}\psi = G, & \Gamma, \\ \mathbf{V}^1_{(-1,\Gamma)}\varphi - \mathbf{V}^1_{(-2,\Gamma)}\psi = H, & \Gamma \end{cases} \tag{6}$$

$$\varphi \in \mathbb{H}^{r}_{p,\#}(\Gamma), \quad \psi \in \mathbb{H}^{r-1}_{p,\#}(\Gamma), \quad G \in \mathbb{H}^{r}_{p,loc}(\Gamma), \quad H \in \mathbb{H}^{r-1}_{p,loc}(\Gamma)$$

where $r = s - 1/p$, G and H are functions given in

terms of f, g and h.

b). Vice versa: if u is a solution to the BVP (4) in the setting (5), then $\varphi := u^+$, $\psi := (\partial_\nu u)^+$ are solutions to the system (6).

c). The system of equations (6) has a unique pair of solutions $\varphi \in \mathbb{W}^{3/2}(\Gamma)$ and $\psi \in \mathbb{W}^{1/2}(\Gamma)$ in the classical setting for $p = 2$ and $s = 2$.

Consider the model mixed BVP for the Helmholtz equation in an angular domain

$$\begin{cases} \Delta u(t) - k^2 u(t) = f(t), & t \in \Omega_\alpha, \\ u^+(s) = g(s), & s \in \mathbb{R}^+, \\ (\partial_{\nu_\Gamma} u)^+(s) = h(s), & s \in \mathbb{R}_\alpha, \end{cases} \tag{7}$$

in the following non-classical setting

$$u \in \mathbb{H}^s_p(\Omega_\alpha), \quad f \in \mathbb{H}^{s-2}_p(\Omega_\alpha) \cap \mathbb{H}^{-1}_0(\Omega_\alpha), \quad g \in \mathbb{H}^{s-1/p}_p(\mathbb{R}^+),$$

$$h \in \mathbb{H}^{s-1-1/p}_p(\mathbb{R}_\alpha), \qquad 1 < p < \infty, \quad \frac{1}{p} < s < 1 + \frac{1}{p} \tag{8}$$

Theorem 7: Let $\alpha \in (0, 2\pi)$, $1 < p < \infty$ and $\dfrac{1}{p} < s < 1 + \dfrac{1}{p}$. The model mixed BVP (7) is Fredholm in the non-classical setting (8) if and only if:

$$\sin^2 \pi\left(\frac{2}{p} - s - i\xi\right) - \cos^2(\pi - \alpha)\left(\frac{2}{p} - s - i\xi\right) \neq 0$$

or, what is equivalent

$$\alpha\left(s-\frac{2}{p}\right)\neq\pm\frac{1}{2}\pi,\pm\frac{3}{2}\pi.$$

In particular, the BVP (7) has a unique solution for arbitrary $0<\alpha<2\pi$ in the in the non-classical settings (8) if:

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha\left(s-\frac{2}{p}\right)<\frac{\pi}{2}.$$

Theorem 8: Let $1<p<\infty$ and $\frac{1}{p}<s<1+\frac{1}{p}$. Let $g_0\in\mathbb{W}_p^{s-1/p}(\Gamma_\alpha)$ and $h_0\in\mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\Gamma_\alpha)$ be some fixed extensions of the boundary conditions $g\in\mathbb{W}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}_\alpha)$ and $h\in\mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}^+)$ initially defined on the subsets $\mathbb{R}_\alpha$ and $\mathbb{R}^+$ of Γ_α only.

a). A solution to the BVP (7) is represented by the formula

$$u(x)=\mathbf{N}_C f(x)+\mathbf{W}_\Gamma(g_0+\varphi_0)(x)-\mathbf{V}_\Gamma(h_0+\psi_0)(x),\quad x\in\Omega_\alpha, \tag{9}$$

where φ_0 and ψ_0 are solutions to the following system of pseudodifferential equations

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\varphi_0(t)+r_{\mathbb{R}^+}\mathbf{V}_{\Delta+k^2,-1}\psi_0(t)=G_+(t), & t\in\mathbb{R}^+\\ \frac{1}{2}\psi_0(t)-r_{\mathbb{R}_\alpha}\mathbf{V}_{\Delta+k^2,+1}\varphi_0(t)=H_-(t) & t\in\mathbb{R}_\alpha,\end{cases} \tag{10}$$

$$\varphi_0\in\mathbb{W}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^+),\qquad \psi_0\in\mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}_\alpha),$$

$$G_+:=r_{\mathbb{R}^+}G_0\in\mathbb{W}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^+),\qquad H_-=r_{\mathbb{R}_\alpha}H_0\in\mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}_\alpha)$$

b). Vice versa: if the pair $\varphi_0\in\mathbb{W}_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^+)$, $\psi_0\in\mathbb{W}_p^{s-1-1/p}(\mathbb{R}_\alpha)$ is a solution to the system (10), then the function $u(x)$ in (9) is a solution to the BVP (7) and $u^+=g_0+\varphi_0$, $(\partial_\nu u)^+=h_0+\psi_0$.

c). The system of boundary pseudodifferential equations (10) has a unique pair of solutions $\varphi_0 \in \mathbb{W}^{1/2}(\mathbb{R}^+) \cap \mathbb{H}^{1/2}(\mathbb{R}^+)$ and $\psi_0 \in \mathbb{W}^{-1/2}(\mathbb{R}_\alpha) \cap \mathbb{H}^{-1/2}(\mathbb{R}_\alpha)$ in the classical setting $p = 2$, $s = 1$.