„საქართველოს უნივერსიტეტი“

მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების სკოლა

სადოქტორო პროგრამა: მათემატიკა

ხელნაწერის უფლებით

დავით ბარამიძე

კერძო ჯამების და ნორლუნდის საშუალოების ქვემიმდევრობების და მათი მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვროლობა ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებზე

მათემატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის
მოსაპოვებლად წარმოდგენილი ნაშრომის

სადისერტაციო მაცნე

(სპეციალობა 0541.1.1 მათემატიკა)

თბილისი

2024

სადისერტაციო ნაშრომი შესრულებულია საქართველოს უნივერსიტეტის მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების სკოლაში.

სადისერტაციო საბჭოს შემადგენლობა:

თავმჯდომარე - პროფესორი, მათემატიკის ინსტიტუტის ხელმძღვანელი როლანდ დუდუჩავა

სამეცნიერო ხელმძღვანელი - მეცნიერ-თანამშრომელი გიორგი ტეფნაძე

საბჭოს წევრი - მეცნიერი თანამშრომელი, მათემატიკის დეპარტამენტის უფროსი ემზარ ხმალაძე

გარე ექსპერტი - ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი დუგლას უგულავა

გარე ექსპერტი - ასოცირებული პროფესორი, თენგიზ კოპალიანი

შიდა ექსპერტი - მოწვეული ლექტორი, მკვლევარი, დოქტორი დავით გოგოლაშვილი

დისერტაციის დაცვა შედგება 2024 წლის 28 მარტს, 16:00 საათზე

მისამართზე: თბილისი, კოსტავას 77ა, 519 აუდიტორია.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება საქართველოს უნივერსიტეტის ბიბლიოთეკაში

სადისერტაციო მაცნე დაიგზავნა 2024 წლის 26 თებერვალს.

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი, სადოქტორო საფეხურისა და საკვალიფიკაციო ნაშრომების მენეჯერი - ნათია მანჯიკაშვილი

ნაშრომის ზოგადი დახასიათება:

პრობლემატიკა, რომელიც შესწავლილია სადოქტორო ნაშრომში, ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ადგილი უკავია ფურიეს ანალიზში. კლასიკური ორთონორმირებული სისტემების მიმართ ინტეგრებადი ფუნქციის ფურიეს მწკრივის სხვადასხვა საშუალოებით შეჯამებადობის საკითხს დიდი ისტორია გააჩნია. ამ მიმართულებით მიღებული შედეგები არსებითად განსაზღვრავდნენ და ახლაც განსაზღვრავენ ფუნქციათა თეორიაში და ჰარმონიულ ანალიზში მთელი რიგი მიმართულებების პრობლემატიკას.

ფურიეს მწკრივების კლასიკური თეორიის გამოყენებით ფუნქცია იშლება უწყვეტ სინუსოიდურ ტალღებად. კლასიკური თეორიისგან განსხვავებით, უოლშის ფუნქციები წარმოადგენენ "მართკუთხა ტალღებს". ამ თეორიის განვითარებაზე ძლიერი გავლენა მოახდინა ტრიგონომეტრიული მწკრივების კლასიკურმა თეორიამ. აქედან გამომდინარე, შეუძლებელია უოლშის სისტემების მიმართ მიღებული შედეგები არ შევადაროთ ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ არსებულ ანალოგებს. ამ თეორიებს შორის ბევრი მსგავსებაა, თუმცა არსებობს მნიშვნელოვანი განსხვავებებიც. მათი დიდი ნაწილი აიხსნება თანამედროვე აბსტრაქტული ჰარმონიული ანალიზით, რომელიც სწავლობს ორთონორმალურ სისტემებს ტოპოლოგიური ჯგუფის სტრუქტურით. დამტკიცებულია არაერთი შესანიშნავი შედეგი კვლევის ისეთ ახალ მიმართულებებში, როგორებიცაა ვეივლეტ ანალიზი, გაბორის თეორია, დროით-სიხშირული ანალიზი, ფურიეს სწრაფი გარდაქმნა, აბსტრაქტული ჰარმონიული ანალიზი და ა.შ. ეს სამეცნიერო წინსვლა მნიშვნელოვანია არა მხოლოდ ამ თეორიების განსავითარებლად, არამედ მათი გამოყენების კუთხით მათემატიკაში, პროგრამირებასა და

სხვადასხვა სფეროებში, როგორებიცაა სიგნალის გადაცემის თეორია, ციფრული სიგნალის დამუშავება, მულტიპლექსირება, სურათის გაუმჯობესება, ფილტრაცია, კოდირების თეორია და ნიმუშების ამოცნობა და ა.შ..

ფურიეს მწკრივების კლასიკური თეორიის გამოყენებით ფუნქცია იშლება უწყვეტ სინუსოიდურ ტალღებად. კლასიკური თეორიისგან განსხვავებით, უოლშის ფუნქციები წარმოადგენენ "მართკუთხა ტალღებს". ამ თეორიის განვითარებაზე ძლიერი გავლენა მოახდინა ტრიგონომეტრიული მწკრივების კლასიკურმა თეორიამ. აქედან გამომდინარე, შეუძლებელია უოლშის სისტემების მიმართ მიღებული შედეგები არ შევადაროთ ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ არსებულ ანალოგებს. ამ თეორიებს შორის ბევრი მსგავსებაა, თუმცა არსებობს მნიშვნელოვანი განსხვავებებიც. მათი დიდი ნაწილი აიხსნება თანამედროვე აბსტრაქტული ჰარმონიული ანალიზით, რომელიც სწავლობს ორთონორმალურ სისტემებს ტოპოლოგიური ჯგუფის სტრუქტურით.

დისერტაციის მიზანია თანამედროვე ჰარმონიულ ანალიზთან დაკავშირებული ამ საინტერესო თეორიის უახლესი შედეგების განიხილვა და განვითარება და მიღებული შედეგების გამოყენება სხვადასხვა საკითხების შესწავლისას. კერძოდ, ჩვენ შევისწავლეთ უოლშ-ფურიეს მწკრივების კერძო ჯამების, ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების და ნორლუნდის საშუალოების ქვემიმდევრობების და მათი შეზღუდული მაქსიმალური ოპერატორების და წონიანი მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობის საკითხები ჰარდის მარტინგალურ H_p სივრცეებზე.

სადოქტორო ნაშრომი შეიცავს სამ თავს:

- ძირითადი განმარტებები და აღნიშვნები და დამხმარე ლემები
- ჰარდის მარტინგალური სივრცეები და უოლშ-ფურიეს მწკრივების კერძო ჯამები
- ჰარდის მარტინგალური სივრცეები და უოლშ-ფურიეს მწკრივების ნორლუნდის საშუალოები

დაწვრილებით ავღწეროთ თითოეული თავის ძირითადი შინაარსი.

პირველ თავში მოყვანილია ძირითადი განმარტებები და აღნიშვნები უოლშის (ორობითი) ჯგუფის, რადემახარის და უოლშის ფუნქციების შესახებ, ასევე მოყვანილია კერძო ჯამების, ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების და ნორლუნდის საშუალოების განმარტებები და საბაზისო თვისებები, ამ თავში ასევე განხილულია, ლებეგის და $L_{p,\infty}$ სივრცეები და ის მეთოდები, რომლებიც მეტად მნიშვნელოვანია ჩვენი შემდგომი განხილვებისთვის. ამ თავის ბოლო სექცია მთლიანად მიძღვნილია ჰარდის მარტინგალური სივრცეების თეორიას, სადაც ასევე მოყვანილია მნიშვნელოვანი თეორემა ჰარდის მარტინგალური სივრცეების ატომებით წარმოდგენის შესახებ, როცა $0 < p \leq 1$ და რამდენიმე კონკრეტული p-ატომი, რომლებიც შემდეგ თავებში დაგვეხმარება მიღებული შედეგების განუზოგადებლობის დამტკიცებაში.

მეორე თავი მთლიანად ეძღვნება უოლშის სისტემის მიმართ კერძო ჯამების ქვემიმდევრობების, მათი შეზღუდული მაქსიმალური ოპერატორების და წონიანი მაქსიმალური

ოპერატორების შემოსაზღვრულობის საკითხების შესწავლას H_p სივრცეებზე, როცა $0 < p \le 1$. განსაკუთრებით საინტერესოა $0 < p < 1$ შემთხვევა, რა დროსაც შესწავლილია როგორც ძლიერი (H_p, L_p), ისე სუსტი (H_p, L_p) ტიპის უტოლობები წონიანი მაქსიმალური ოპერატორებისთვის ოპტიმალური წონებით. შესწავლილია ამ თავში მიღებული შედეგების გაუძლიერებადობის საკითხებიც. დამტკიცებული შედეგების გამოყენებით, ახალ შედეგებთან ერთად, კერძო შემთხვევებში მივიღეთ ზოგიერთი ცნობილი შედეგიც.

მესამე თავში განხილულია უოლშის სისტემების მიმართ ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების და მათი ქვემიმდევრობების მიმართ შეზღუდული მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობის საკითხები H_p სივრცეებზე. ამის შემდეგ, განხილულია უფრო ზოგადი შეჯამებადობის მეთოდები, რომელიც ლიტერატურაში ცნობილია, როგორც ნორლუნდის საშუალოები და შესწავლილია იგივე ტიპის ამოცანები. ამ მიმართულებით მიღებულია ბევრი ახალი შედეგი. ვინაიდან ფეიერის და ჩეზაროს საშუალოები არიან ნორლუნდის საშუალოების კონკრეტული მაგალითები, ამ კერძო შემთხვევებში ჩვენ ასევე მივიღეთ რამდენიმე უკვე ცნობილი შედეგი.

კვლევის სიახლე და ინოვაციურობა

განვიხილოთ დისკრეტული ჯგუფი $Z_2 = \{0,1\} \mod(2)$ შეკრების ოპერაციის მიმართ. $G-$თი ავღნიშნოთ ამ ჯგუფების პირდაპირი ნამრავლი $G := \underset{k=0}{\overset{\infty}{\times}} Z_2$. ცხადია ყოველი $x \in G$ წარმოიდგინება შემდეგი სახით $x = (x_i, i \in N)$, სადაც $x_i \in Z_2 \, (i \in N)$. მოცემულ ჯგუფზე შეკრების ოპერაცია განიმარტება, როგორც შესაბამისი i-ური კოორდინატების $\mod(2)$ ჯამი.

ყოველი ნატურალური რიცხვისთვის $n \in N$-თვის გვაქვს ცალსახა წარმოდგენა

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i, \quad (n_i \in \{0,1\} \quad i \in N),$$

სადაც მხოლოდ n_i-ების სასრული რაოდენობა განსხვავდება ნულისგან. შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\langle n \rangle := \min\{ j \in N : n_j \neq 0 \} \text{ და } |n| := \max\{ j \in N : n_j \neq 0 \},$$

$$\rho(n) = |n| - [n]$$

და

$$V(n) := n_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |n_k - n_{k-1}|, \text{ ნებისმიერი } n \in N - \text{თვის.}$$

ნებისმიერი ნატურალური $\{n_{s_j}\}, j = 1, 2, \ldots, r,$ რიცხვების მიმდევრობისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს

$$2^s \le n_{s_1} \le n_{s_2} \le \ldots \le n_{s_r} < 2^{s+1}, \quad s \in N,$$

ჩვენ ასევე განვმარტავთ შემდეგ რიცხვებს

$$s_- := \min\left\{\left[n_{s_j}\right]\right\}, \qquad s_+ := \max\left\{\left|n_{s_j}\right|\right\} = s$$

და

$$\rho_s\left(n_{s_j}\right) := s_+ - s_-. \tag{2.1}$$

უფრო მეტიც, თუ

$$2^s \le n_{s_j} \le 2^{s+1}, \quad j = 1, \ldots r, \quad s \in N,$$

რომელიც ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$n_{s_j} = \sum_{i=1}^{r_{s_j}} \sum_{k=l_i^{s_j}}^{t_i^{s_j}} 2^k,$$

სადაც

$$0 \le l_1^{s_j} \le t_1^{s_j} \le l_2^{s_j} - 2 < l_2^{s_j} \le t_2^{s_j} \le \ldots \le l_{r_j}^{s_j} - 2 < l_{r_j}^{s_j} - 2 < l_{r_{s_j}}^{s_j} \le t_{r_{s_j}}^{s_j},$$

მაშინ განვმარტოთ მათი ახალი რიცხვითი მახასიათებელი

$$A_s := \left\{l_1^{s_j}, l_2^{s_j}, \ldots, l_{r_s^1}^s\right\} \bigcup \left\{t_1^s, t_2^s, \ldots, t_{r_s^2}^s\right\} = \left\{u_1^s, u_2^s, \ldots, u_{r_s^3}^s\right\},$$

სადაც

$$u_1^s < u_2^s < \ldots < u_{r_s^3}^s \text{ და } t_{r_{s_j}}^{s_j} = s \in A_s, \text{ სადაც } j = 1, 2, \ldots, r.$$

$|A_s|$-ით ავღნიშნოთ A_s სიმრავლის კარდინალური რიცხვი

$$\left|A_s\right| := card\left(A_s\right)+1.$$

განმარტების საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ

$$\left|A_s\right| = r_s^3 \le r_s^1 + r_s^2 + 1.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$\sup_{s\in\square} |A_s| < \infty,$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სიმრავლეები

$$\{n_{s_1}, n_{s_2}, \cdots, n_{s_r}\}$$

არიან ერთობლივ შემოსაზღვრულები $s \in \square_+$-ის მიმართ და ყოველ n_{s_j} რიცხვს აქვს სასრული $V(n_{s_j})$ ვარიაცია, რაც ნიშნავს, რომ არსებობს მუდმივი c, რომლისთვისაც

$$V(n_{s_j}) < c < \infty, \text{ ნებისმიერი } \; j = 1, 2, \ldots, r \text{ -თვის.}$$

რადემახარის n-ური განზოგადებული ფუნქცია G ჯგუფზე განვმარტოთ შემდეგნაირად:

$$r_n(x) := (-1)^{x_n}, \qquad (n \in N \quad x \in G).$$

განვსაზღვროთ n-ური ვილინკინის ფუნქცია, როგორც

$$w_n := \prod_{j=0}^{\infty} r_j^{n_j} \quad (n \in N).$$

$w := (w_n : n \in N)$ სისტემას ეწოდება უოლშის სისტემა.

$L_p(G)$ და $weak - L_p(G)$ სივრცეების ნორმები (ნახევრად-ნორმები) განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\|f\|^p_{L_p(G)} := \int_G |f(x)|^p \, d\mu(x),$$

$$\|f\|^p_{L_{p,\infty}(G)} := \sup_{\lambda>0} \lambda^p \mu\left(x \in G : |f(x)| > \lambda\right), \quad (0 < p < +\infty).$$

ვილინკინ-ფურიეს მწკრივის ერთგანზომილებიანი მართკუთხოვანი კერძო ჯამები განიმარტება შემდეგნაირად:

$$S_n(f;x) := \sum_{j=0}^{n-1} f(j)(x) w_j(x)$$

სადაც რიცხვებს

$$f(j) := \int_G f(x) w_j(x) \, d\mu(x).$$

f ფუნქციის j-ური ვილინკინ-ფურიეს კოეფიციენტი ეწოდება. განვმარტოთ ფეიერის საშუალო და მაქსიმალური ოპერატორი შემდეგნაირად:

$$\sigma_n f := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} S_j f, \quad \sigma^* f := \sup_{n \in N} |\sigma_n f|.$$

ვთქვათ $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ არის არაუარყოფით რიცხვთა მიმდევრობა. f ფუნქციის ფურიეს მწკრივების n-ური ნორლუნდის საშუალო განიმარტება შესაბამისად:

$$t_n f := \frac{1}{Q_n} \sum_{k=1}^{n} q_{n-k} S_k f, \qquad Q_n := \sum_{k=0}^{n-1} q_k.$$

ნორლუნდის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორები განიმარტება შემდეგნაირად:

$$t^* f := \sup_{n \in \mathbb{N}} |t_n f|.$$

განვმარტოთ ფეიერის საშუალოები და მათი მაქსიმალური ოპერატორი შემდეგნაირად:

$$\sigma_n f := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_j f, \qquad \sigma^* f := \sup_{n\in N}\left|\sigma_n f\right|.$$

განვმარტოთ ჩეზაროს საშუალოები და მათი მაქსიმალური ოპერატორი შემდეგნაირად:

$$\sigma_n^\alpha f := \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{j=1}^{n} A_{n-j}^{\alpha-1} S_j f, \qquad A_k^\alpha := \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k)}{k!}, \quad A_0^\alpha := 0,$$

და

$$\sigma^{\alpha,*} f := \sup_{n\in N}\left|\sigma_n^\alpha f\right|.$$

ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოები და მათი მაქსიმალური ოპერატორები განიმარტება შემდეგნაირად:

$$L_n f := \frac{1}{l_n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{S_k f}{n-k}, \qquad l_n := \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k},$$

და

$$L^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|L_n f\right|.$$

ვიტყვით, რომ მიმდევრობა $\{b_k, k\geq 0\}$ არის ამოზნექილი, თუ

$$b_{n-1} + b_{n+1} - 2b_n \geq 0, \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

ჩეზაროს და ნორლუნდის როგარითმული საშუალოები სწორედ ასეთი ამოზნექილი მიმდევრობებით არიან წარმოქმნილნი.

σ-ალგებრა განსაზღვრული

$$I_n(x) := \{y \in G : y = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, y_n, y_{n+1})\}$$

სიმრავლეებით ავღნიშნოთ $F_k\ (k \in N)$-თი. მარტინგალი $F_k\ (k \in N)$ ნაკადის მიმართ ავღნიშნოთ $f = (f_n : n \in N)$-ით. ჰარდის მარტინგალური სივრცე $H_p(G)$ $(0 < p < \infty)$ შეიცავს ისეთ მარტინგალებს, რომელთათვისაც

$$\|f\|_{H_p(G)} := \|f^*\|_{L_p(G)} < \infty, \quad f^* = \sup_{n \in N} |f^{(n)}|.$$

უწყვეტობის მოდული $H_p(G)$ $(0 < p < \infty)$ სივრცეებში განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\omega_{H_p(G)}(1/2^k, f) := \|f - S_{2^k} f\|_{H_p(G)}.$$

სადოქტორო ნაშრომში ჩვენ განვიხილეთ მხოლოდ ერთგანზომილებიან ჰარდის მარტინგალურ სივრცეები.

კვლევის მეთოდოლოგია:

ნაშრომი არის თეორიული ხასიათის, რომელიც ეხება ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებზე სხვადასხვა ოპერატორების შემოსაზღვრულობის საკითხებს. დასმული ამოცანების გადასაჭრელად განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ჰარდის მარტინგალური სივრცეების დეკომპოზიცია მარტივი ფუნქციების საშუალებით, რომელსაც ატომებს უწოდებენ და რომელიც ჰარდის სივრცეების ახალ დახასიათებას გვაძლევს.

ვიტყვით, რომ შემოსაზღვრულ ზომად ფუნქციას a-ს ეწოდება p – ატომი, თუ არსებობს ორობითი ინტერვალი I, ისეთი, რომ

$$\int_G a d\mu = 0, \quad \|a\|_\infty \le \mu(I)^{-1/p}, \quad Supp(a) \subset I.$$

ვეისმა მოგვცა $H_p(G)$ სივრცეების დახასიათება:

ლემა 3.1: მარტინგალი $f = \left(f^{(n)}, n \in \mathbb{N} \right)$ ეკუთვნის $H_p(G)$ $(0 < p \le 1)$ სივრცეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა არსებობს $p-$ ატომების მიმდევრობა $\left(a_k, k \in \mathbb{N}\right)$ და ნამდვილი რიცხვების მიმდევრობა $\left(\mu_k, k \in \mathbb{N}\right)$ ისეთი, რომ ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -თვის

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k S_{2^n}(a_k) = f^{(n)}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k|^p < \infty. \tag{3.1}$$

უფრო მეტიც,

$$\|f\|_{H_p(G)} \approx \inf \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k|^p \right)^{1/p},$$

სადაც ინფიმუმი აღებულია ყველა შესაძლო (3.1) წარმოდგენებს შორის.

ამ თეორემის გამოყენებით შეგვიძლია დავასკვნათ:

ლემა 3.2: ვთქვათ T სუბწრფივი ოპერატორია, რომელიც შემოსაზღვრულია $L_\infty(G)$-დან $L_\infty(G)$-ში. თუ $0 < p \le 1$-თვის

$$\int_{G \setminus I} |Ta(x)|^p d\mu(x) \le c_p < \infty,$$

ყოველი p -ატომისთვის a, სადაც I აღნიშნავს p -ატომ a -ს სუპორტს, მაშინ

$$\|Tf\|_{L_p(G)} \le c_p \|f\|_{H_p(G)}.$$

ლემა 3.3: დავუშვათ, რომ U ოპერატორი არის სუბწრფივი და $0 < p_0 \le 1$-სთვის სრულდება

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^{p_0} \mu\left\{t \in \bar{J} : |Uf(t)| > \lambda\right\} \le c_{p_0} < \infty$$

ყოველი p_0-ატომისთვის a, სადაც J ნიშნავს ატომის სუპორტს და $\bar{J} = G$, J.

თუ U ოპერატორი არის შემოსაზღვრული $L_{p_1}(G)$-დან $L_{p_1}(G)$-ში, სადაც $1 < p_1 \le \infty$, მაშინ U ოპერატორი არის სუსტი (H_{p_0}, L_{p_0}) ტიპის, რაც ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\|Uf\|_{L_{p_0,\infty}} \le C_{p_0} \|f\|_{H_{p_0}}.$$

უფრო მეტიც, თუ $p_0 < 1$, მაშინ, ყოველი $f \in L_1(G)$-თვის,

$$y\mu\left\{x \in G : \left|Uf(t)\right| > y\right\} \le C\|f\|_1, \quad (\forall\ y > 0).$$

კვლევითი თემის აქტუალობა

როგორც ცნობილია, ერთგანზომილებიანი ვილინკინის სისტემა არ ქმნის ბაზისს $L_1(G)$ სივრცეში. უფრო მეტიც, არსებობს ფუნქცია $H_p(G)$ სივრცეში, ისეთი რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n f\|_{L_p(G)} = \infty, \quad (0 < p \le 1).$$

ტეფნაძემ დაამტკიცა [14]-ში, რომ თუ $0 < p \le 1$ და $f \in H_p(G)$, მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\tilde{S}^{*,\nabla}$, რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად

$$\tilde{S}^{*,\nabla} f := \sup_{n \in \mathbb{N}_+} \frac{|S_n f|}{(n+1)^{1/p-1} \log^{[p]}(n+1)},$$

სადაც $[p]$ აღნიშნავს p რიცხვის მთელ ნაწილს, შემოსაზღვრულია მარტინგალური ჰარდის $H_p(G)$ სივრციდან ლებეგის $L_p(G)$ სივრცეში.

უფრო მეტიც, თუ $0 < p \le 1$, მაშინ ნებისმიერი არაუარყოფითი, არაკლებადი $\varphi : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{R}$ ფუნქციისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n+1)^{1/p-1}}{\varphi(n)} = \infty,$$

არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$ მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|S_n f|}{\varphi(n)} \right\|_p = \infty.$$

ტეფნაძემ დაამტკიცა [13]-ში, რომ თუ $f \in H_p(G) \quad (0 < p \le 1)$ და

$$\omega_{H_p(G)}\left(1/2^k, f\right) = o\left(1/(2^{k(1/p-1)} \log^{[p]} k)\right), \text{ როცა } \quad k \to \infty,$$

მაშინ

$$\left\|S_n f - f\right\|_{L_p} \to 0, \quad n \to \infty,$$

სადაც $[p]$ აღნიშნავს p ნამდვილი რიცხვის მთელი ნაწილს. უფრო მეტიც, არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G), \quad (0 < p \le 1)$ ისეთი, რომ

$$\omega_{H_p(G)}\left(f, 1/2^n\right) = O\left(1/\left(2^{n(1/p-1)} \log^{[p]} n\right)\right), \quad \text{როცა} \quad n \to \infty$$

და

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\|S_n f - f\right\|_{L_p(G)} > c > 0.$$

ვეისმა დაამტკიცა [15]-ში, რომ ერთგანზომილებიანი ფეიერის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი σ^* შემოსაზღვრულია $H_{1/2}(G)$-დან $L_{1/2,\infty}(G)$ -ში. ბლაჰოტა, გატი და გოგინავას მიერ ნაჩვენები იქნა [9]-ში, რომ არსებობს მარტინგალი $f \in H_{1/2}(G)$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\sigma^* f\right\|_{L_p(G)} = \infty.$$

ტეფნაძემ დაამტკიცა [11]-ში, რომ თუ $0 < p \le \frac{1}{2}$ და $f \in H_p(G)$, მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\tilde{\sigma}^{*,\nabla}$, რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად

$$\tilde{\sigma}^{*,\nabla} f := \sup_{n\in\mathbb{N}_+} \frac{\left|\sigma_n f\right|}{(n+1)^{1/p-2} \log^{2[p+1/2]}(n+1)},$$

სადაც $[p]$ აღნიშნავს p რიცხვის მთელ ნაწილს, შემოსაზღვრულია მარტინგალური ჰარდის $H_p(G)$ სივრციდან ლებეგის $L_p(G)$ სივრცეში.

უფრო მეტიც, თუ $0 < p \le 1/2,$ მაშინ ნებისმიერი არაუარყოფითი, არაკლებადი $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ფუნქციისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n+1)^{1/p-2}}{\varphi(n)} = \infty,$$

არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$ მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$\left\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\sigma_n f|}{\varphi(n)} \right\|_p = \infty.$$

ტეფნაძემ დაამტკიცა [12]-ში, რომ თუ $0 < p \le 1/2$ და

$$\omega_{H_p(G)}\left(1/2^k, f\right) = o\left(1/\left(2^{k(1/p-2)} \log^{2k[p+1/2]} k\right)\right),$$

როცა $k \to \infty,$ მაშინ

$$\left\|\sigma_n f - f\right\|_{L_p(G)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

უფრო მეტიც, არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G_m),$ ისეთი, რომ

$$\omega_{H_p(G)}\left(f, 1/2^n\right) = O\left(1/(2^{|n|(1/p-2)} \log^{2[p+1/2]} n)\right),$$

როცა $n \to \infty$ და

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\|\sigma_n f - f\right\|_{L_p(G)} > c > 0.$$

გოგინავამ აჩვენა [8]-ში, რომ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p,$ $(0 < p \le 1)$ ისეთი, რომ ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი L^* არ არის

შემოსაზღვრული ლებეგის L_p სივრცეში. კერძოდ, არსებობს მარტინგალი $f \in H_p$ ისეთი, რომ

$$\left\| L^* f \right\|_p = +\infty .$$

ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებში t_n საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორების და წონიანი მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობა და ამ საშუალოების H_p ნორმების ახალი ჰარდის ტიპის უტოლობები განხილულია ბლაჰოტას, გოგინავას, გატის, მემიჩის, ნოჯის, პერსონის, ტეფნაძის, ვალის, ვეისის და სხვა ავტორების შრომებში.

კვლევის მიზნები და ამოცანები

კვლევის მიზანია, იმ ძირითადი შედეგების წარმოდგენა, რომელიც ჩვენს მიერ არის მიღებული და სადოქტორო ნაშრომის ძირითად თეორემებს წარმოადგენს.

უოლშ-ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამებისთვის [4]-ში დავამტკიცეთ, რომ:

თეორემა 4.1: ვთქვათ $0 < p < 1$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\tilde{S}^{*,\nabla}$, რომელიც განმარტებულია ტოლობით

$$\tilde{S}^{*,\nabla} f = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|S_n f|}{2^{\rho(n)(1/p-1)}}, \qquad (4.1)$$

შემოსაზღვრულია მარტინგალური ჰარდის $H_p(G)$ სივრციდან $L_{p,\infty}(G)$ სივრცეში.

[4]-ში ასევე დავამტკიცეთ, რომ თეორემა 4.1 განუზოგადებელია შემდეგი აზრით:

თეორემა 4.2: ა) ვთქვათ $0 < p < 1$ და $\tilde{S}^{*,\nabla}$ არის განმარტებული (4.1) ტოლობით. მაშინ არსებობს p -ატომების $\{ f_n, n \in \mathbb{N} \}$ მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\left\| \tilde{S}^{*,\nabla} f_n \right\|_p}{\| f_n \|_{H_p}} = \infty.$$

ბ) ვთქვათ $0 < p < 1$. თუ $\{\varphi_k\}$ არის ნებიმიერი არაუარყოფითი და არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{2^{\rho(k)(1/p-1)}}{\varphi_k} = \infty,$$

მაშინ, არსებობს p -ატომების $\{ f_n, n \in \mathbb{N} \}$ მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\left\| \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_k f_n|}{\varphi_k} \right\|_{L_{p,\infty}}}{\| f_n \|_{H_p}} = \infty.$$

შედეგი 4.3: ვთქვათ $0 < p < 1$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $S^{*,\Delta}$, რომელიც განმარტებულია ტოლობით

$$S^{*,\square} f := \sup_{k \in \square} \left| S_{2^k} f \right|$$

არის სუსტი (H_p, L_p) ტიპის.

შედეგი 4.4: ვთქვათ $0 < p < 1$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\tilde{S}^{*,\nabla}$, რომელიც განმარტებულია შემდეგნაირად

$$\tilde{S}^{*,\square} f := \sup_{k \in \square} \left| S_{m_k} f \right|$$

არის სუსტი (H_p, L_p) ტიპის, როცა შესრულებულია პირობა

$$\sup_{k \in \square} \rho(m_k) < c < \infty.$$

[5]-ში ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 4.5: ვთქვათ $0 < p < 1$, $f \in H_p(G)$ და $\varphi : \square_+ \to \square_+$ არის ნებისმიერი არაუარყოფითი და არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_k^p} < c < \infty. \tag{4.2}$$

მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\tilde{S}^{*,\nabla}$, რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად

$$\tilde{S}^{*,\nabla} f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\left|S_n f\right|}{2^{\rho(n)(1/p-1)}\varphi_{\rho(n)}},$$

შემოსაზღვრულია მარტინგალური ჰარდის $H_p(G)$ სივრციდან ლებეგის $L_p(G)$ სივრცეში.

თეორემა 4.3 განსაკუთრებით საინტერესოა იმ შემთხვევაში, როცა განვიხილავთ ქვემიმდევრობებს.

შედეგი 4.6: ვთქვათ $0 < p < 1$, $f \in H_p(G)$ და $\{\varphi_k\}$ არის ნებისმიერი არაუარყოფითი და არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (4.2) პირობას და $\{m_k, k \geq 0\}$ არის დადებითი ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა. მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\tilde{S}^{*,\nabla}$, რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად

$$\tilde{S}^{*,\nabla} f = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\left|S_{m_k} f\right|}{2^{\rho(m_k)(1/p-1)}\varphi_{\rho(m_k)}},$$

არის ძლიერი (H_p, L_p) ტიპის.

[5]-ში ჩვენ ასევე დავამტკიცეთ თეორემა 4.5-ის გაუძლიერებადობა:

თეორემა 4.7: ვთქვათ $0 < p < 1$ და $\{\varphi_k\}$ არის ნებისმიერი არაუარყოფითი, არაკლებადი რიცხვების მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi_k^p}=\infty.$$

მაშინ არსებობს p -ატომების f_k მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{|S_n f_k|}{2^{\rho(n)(1/p-1)}\varphi_{\rho(n)}},\right\|_p}{\|f_k\|_{H_p}}=\infty.$$

თეორემა 4.3-ის, შედეგი 4.4-ის და თეორემა 4.5-ის გამოყენებით მივიღეთ

შედეგი 4.8: ვთქვათ $0<p<1$ და $f\in H_p(G)$. მაშინ, წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\tilde{S}^{*,\nabla,\varepsilon}$, რომელიც განიმარტება ტოლობით

$$\tilde{S}^{*,\nabla,\varepsilon}f:=\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{|S_k f|}{2^{\rho(k)(1/p-1)}\left(\rho(k)\log^{1+\varepsilon}\rho(k)\right)^{1/p}},$$

არის ძლიერი (H_p,L_p) ტიპის, როცა $\varepsilon>0$ და არ არის ძლიერი (H_p,L_p) ტიპის, როცა $\varepsilon=0$.

[2]-ში ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ:

თეორემა 4.9: ვთქვათ $0<p<1$, $f\in H_p(G)$ და $\{m_k,k\geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა და

$$\left\{m_{s_i},1\leq i\leq r\right\}\subset\left\{m_k,k\geq 0\right\}$$

არის ისეთი ქვემიმდევრობა, რომ

$$2^s \le m_{s_1} \le m_{s_2} \le \cdots \le m_{s_r} \le 2^{s+1},\ s \in \mathbb{N}.$$

მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\tilde{S}^{*,\nabla}$, რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად

$$\tilde{S}^{*,\nabla} f := \sup_{s\in\mathbb{N}} \sup_{2^s \le m_{s_i} < 2^{s+1}} \frac{\left|S_{m_{s_i}} f\right|}{2^{\rho_s\left(m_{s_i}\right)(1/p-1)}},$$

სადაც $\rho_s\left(m_{s_i}\right)$ განიმარტება (2.1) ტოლობით,

შემოსაზღვრულია მარტინგალური ჰარდის $H_p(G)$ სივრციდან ლებეგის $L_p(G)$ სივრცეში.

[2]-ში ჩვენ ასევე დავამტკიცეთ თეორემა 4.7-ის განუზოგადებლობა შემდეგი აზრით:

თეორემა 4.10: ვთქვათ $0 < p < 1$, $f \in H_p\left(G\right)$ და $\left\{m_k, k \ge 0\right\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა და

$$\left\{m_{s_i}, 1 \le i \le r\right\} \subset \left\{m_k, k \ge 0\right\}$$

არის ისეთი ქვემიმდევრობა, რომ სამართლიანია

$$2^s \le m_{s_1} \le m_{s_2} \le \cdots \le m_{s_r} \le 2^{s+1},\ s \in \mathbb{N}.$$

მაშინ ნებისმიერი არაუარყოფითი, არაკლებადი ფუნქციისთვის $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$sup_{s\in\mathbb{N}} \sup_{2^s \le m_{s_i} < 2^{s+1}} \frac{2^{\rho_s(m_{s_i})(1/p-1)}}{\varphi(m_{s_i})} = \infty,$$

არსებობს p -ატომების f_s მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$\sup_{s\in\mathbb{N}} \frac{\left\| \sup_{2^s \le m_{s_i} < 2^{s+1}} \frac{\left| S_{m_{s_i}} f_s \right|}{\varphi(m_{s_i})} \right\|_p}{\| f_s \|_{H_p}} = \infty.$$

შედეგი 4.11: ვთქვათ $p > 0$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ, წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\tilde{S}_2^{*,\nabla}$, რომელიც განმარტებულია ტოლობით

$$\tilde{S}_2^{*,\mathbb{N}} f := \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| S_{2^k+2^{k-1}} f \right|,$$

არის ძლიერი (H_p, L_p) ტიპის.

შედეგი 4.12: ვთქვათ $0 < p < 1$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\tilde{S}_i^{*,\nabla}$, $i = 3, 4,$ რომლებიც განმარტებულია ტოლობით

$$\tilde{S}_3^{*,\nabla} f := \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\left| S_{2^k+2^{[k/2]}} f \right|}{2^{k(1/p-1)/2}}$$

და

$$\tilde{S}_4^{*,\nabla} f := \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\left|S_{2^k+2^{[k/3]}} f\right|}{2^{\frac{2}{3}k(1/p-1)}},$$

სადაც $[n]$ აღნიშნავს n რიცხვის მთელ ნაწილს, არიან ძლიერი (H_p, L_p) ტიპის.

ბოლოს, კერძო ჯამებისთვის ჩვენ განვიხილეთ $p=1$ შემთხვევა და [1]-ში დავამტკიცეთ, რომ:

თეორემა 4.13: ა) ვთქვათ $f \in H_1$. მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი $\tilde{S}^{*,\nabla}$, რომელიც განმარტებულია ტოლობით

$$\tilde{S}^{*,\nabla} f := \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\left|S_k f\right|}{V(k)} \tag{4.3}$$

შემოსაზღვრულია მარტინგალური ჰარდის H_1 სივრციდან $L_{1,\infty}$ სივრცეში.

ბ) ვთქვათ $f \in H_1(G)$. მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი $\tilde{S}^{*,\nabla}$, რომელიც განმარტებულია ტოლობით (4.3) არ არის შემოსაზღვრული მარტინგალური ჰარდის $H_1(G)$ სივრციდან ლებეგის $L_1(G)$ სივრცეში.

ზემოთ დამტკიცებულ თეორემებში განუზოგადებლობა დამტკიცებულია მხოლოდ p-ატომების გამოყენებით. შემდეგ თეორემაში ჩვენ ცდადი სახით ავაგეთ ასეთი ტიპის მარტინგალები, რომლებიც უზრუნველყოფენ მიღებული შედეგების განუზოგადებლობას:

[3]-ში ჩვენ დავამტკიცეთ,რომ:

თეორემა 4.14: ა) ვთქვათ $0 < p < 1$ და $\{\varphi_k\}$ არის ნებისმიერი არაკლებადი და არაუარყოფითი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{2^{\rho(\alpha_k)(1/p-1)}}{\varphi_{\alpha_k}} = \infty,$$

მაშინ მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_p(G)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \frac{S_{\alpha_k} f}{\varphi_{\alpha_k}} \right\|_{L_{p,\infty}} = \infty.$$

ბ) ვთქვათ $0 < p < 1$ და $\{\alpha_k, k \geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა და

$$\left\{\alpha_{s_i}, 1 \leq i \leq r\right\} \subset \left\{\alpha_k, k \geq 0\right\}$$

ისეთია, რომ

$$2^s \leq \alpha_{s_1} \leq \alpha_{s_2} \leq \cdots \leq \alpha_{s_r} \leq 2^{s+1}, s \in \mathbb{N}$$

მაშინ, ნებისმიერი არაუარყოფითი, არაკლებადი $\{\varphi_k\}$ მიმდევრობისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\sup_{s\in\mathbb{N}} \sup_{2^s \leq m_{s_i} < 2^{s+1}} \frac{2^{\rho_s(m_{s_i})(1/p-1)}}{\varphi(m_{s_i})} = \infty,$$

მაშინ მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_p(G)$, ისეთი, რომ მაქსიმალური ოპერატორი, რომელიც განმარტებულია ტოლობით

$$\sup_{s\in\mathbb{N}} \sup_{2^s \le \alpha_{s_i} < 2^{s+1}} \frac{\left|S_{\alpha_{s_i}} f\right|}{\varphi_{\alpha_{s_i}}}$$

არ არის შემოსაზღვრული მარტინგალური ჰარდის სივრციდან $H_p(G)$ ლებეგის $L_p(G)$ სივრცეში.

გ) ვთქვათ $0 < p < 1$, $\{\alpha_k, k \ge 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა და $\{\varphi_k\}$ არის ნებისმიერი არაუარყოფითი, არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_k^p} = \infty,$$

მაშინ მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_p(G)$, ისეთი, რომ მაქსიმალური ოპერატორი, რომელიც განმარტებულია ტოლობით

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\left|S_{\alpha_k} f\right|}{2^{\rho(\alpha_k)(1/p-2)} \varphi_{\rho(\alpha_k)}}$$

არ არის შემოსაზღვრული მარტინგალური ჰარდის სივრციდან $H_p(G)$ ლებეგის $L_p(G)$ სივრცეში.

შემდეგ [7]-ში ჩვენ განვიხილავთ ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების შემოსაზღვრულობას $H_p(G)$ სივრცეში:

თეორემა 15: ვთქვათ $0 < p < 1.$ მაშინ მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_p(G),$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| L_{2^n} f \right\|_{L_{p,\infty}} = \infty.$$

შედეგი 16: ვთქვათ $0 < p < 1.$ მაშინ, მაქსიმალური ოპერატორი

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| L_{2^n} f \right|$$

არ არის ძლიერი (სუსტი) (H_p, L_p) ტიპის.

ბოლოს, ჩვენ განვიხილავთ [6]-ში ნორლუნდის საშუალოების შემოსაზღვრულობას $H_p(G)$ სივრცეში:

თეორემა 17: ვთქვათ $0 \le \alpha \le 1,$ β არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვი და t_n არის ნორლუნდის საშუალოები, რომელიც წარმოაქმნილია ამოზნექილი და არაზრდადი $\{q_k, k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობით, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\frac{q_1 - (3/2)q_3}{Q_n} \ge \frac{C}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n},$$

სადაც C აბსოლუტური მუდმივია. მაშინ, ნებისმიერი $0 < p < 1/(1+\alpha)$ -თვის, მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_p$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| t_{2^n} f \right\|_{L_{p,\infty}} = \infty.$$

შედეგი 18: ვთქვათ $0 < p < 1/(1+\alpha)$, სადაც $0 < \alpha \le 0.56$. მაშინ მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_p$ ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \sigma_{2^k}^{\alpha} f \right\|_{L_{p,\infty}} = \infty.$$

შედეგი 19: ვთქვათ $0 < p < 1/(1+\alpha)$, სადაც $0 < \alpha \le 0.56$. მაშინ, მაქსიმალური ოპერატორი

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \sigma_{2^k}^{\alpha} f \right|$$

არ არის ძლიერი (სუსტი) (H_p, L_p) ტიპის.

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] *D. Baramidze,* A note on some weighted maximal operators of partial sums of Walsh-Fourier series, Acta Math. Acad. Paedagog., (to appear).

[2] *D. Baramidze,* Martingale Hardy spaces and some new weighted maximal operators of partial sums of Walsh-Fourier series, Georgian Math. J., (submitted).

[3] *D. Baramidze,* Martingale Hardy spaces and divergence of maximal operators associated with Walsh-Fourier series, (submitted).

[4] *D. Baramidze, L.-E. Persson, H. Singh, G. Tephnadze,* Some new weak (*Hp–Lp*) type inequality for weighted maximal operators of partial sums of Walsh-Fourier series, Mediterr. J. Math., 20 no. 5, paper no. 28, (2023), 13 pp.

[5] *D. Baramidze, L.-E. Persson, G. Tephnadze,* Some new (*Hp –Lp*) type inequalities for weighted maximal operators of partial sums of Walsh-Fourier series, Positivity, 27 no 3, paper no. 38, (2023), 14 pp.

[6] *D. Baramidze, L.-E. Persson, K. Tangrand, G. Tephnadze,* (*Hp – Lp*)-Type inequalities for subsequences of Norlund means of Walsh ¨ –Fourier series, J. Inequal. Appl., paper no. 52, (2023), 13 pp

[7] *D. Baramidze, L.-E. Persson, H. Singh, G. Tephnadze,* On the convergence and divergence of subsequence of Norlund

logarithmic means of Walsh-Fourier series, J. Inequal. Appl., paper no. ¨30, (2022), 13 pp.

[8] *G. G ` at, U. Goginava,* On the divergence of Norlund logarithmic means of Walsh-Fourier series, ¨Acta Math. Sin., 25. no. 6, (2009), 903-916

[9]*U. Goginava,* Maximal operators of Fejer means of double Walsh-Fourier series, Acta Math. ´ Hungar., 115, no. 4, (2007), 333-340.

[10] *L.-E. Persson, G. Tephnadze, F. Weisz,* Martingale Hardy Spaces and Summability of onedimensional Vilenkin-Fourier Series, Birkhauser/Springer, 2022.

[11] *G. Tephnadze,* On the maximal operators of Vilenkin-Fejer means on Hardy spaces, Math. Inequal. Appl., 16, no. 1, (2013), 301-312

[12] G. Tephnadze, A note on the norm convergence by Vilenkin-Fejer means, Georgian Math. J., ´21, no. 4, (2014), 511-517.

[13] *G. Tephnadze,* On the partial sums of Vilenkin-Fourier series, J. Contemp. Math. Anal., 49, no.
1, (2014), 23-32.

[14] *G. Tephnadze,* On the Vilenkin-Fourier coefficients, Georgian Math. J., 20 no. 1, (2013), 169-
177

[15] *F. Weisz,* Weak type inequalities for the Walsh and bounded Ciesielski systems, Anal. Math.,
30, no. 2, (2004), 147-160.

ჰარდის სივრცეები

„The University of Georgia“

School of Science and Technology

PhD program: mathematics

Copyright of the manuscript

Davit Baramidze

Boundedness of subsequences of partial sums and Nörlund means and their maximal operators on the martingale Hardy spaces

Thesis submitted for the academic degree of Doctor of Mathematics

Dissertation bulletin

(Specialty 0541.1.1 mathematics)

Tbilisi

2024

The thesis was completed in the School of Science and Technology of the University of Georgia.

Dissertation Board:

Chairman - Professor, Head of the Institute of Mathematics Roland Duduchava

Scientific supervisor- Research Fellow George Tephnadze

Council member- Research Fellow, Head of Mathematics Department Emzar Khmaladze

External expert- Doctor of Physical and Mathematical sciences, professor Duglas Ugulava

External expert- Associate professor Tengiz Kopaliani

Internal expert- Invited lecturer researcher, Doctor Davit Gogolashvili

Thesis defense

be held on March 28, 2024, at 4:00 p.m.

Address: Kostava 77a, 519 audience, Tbilisi

Dissertation can be introduced in the library of the University of Georgia

Dissertation bulletin was sent on February 26, 2024.

Secretary of the Dissertation Council, manager of the doctoral level and qualification theses - Natia Manjikashvili

General description

The subject we discuss in this thesis is the main topic in Fourier Analysis. Summability of various means of Fourier series with respect to classical orthonormal systems of integrable functions has a great history. The results obtained in this direction essentially determine the problems in Function Theory and Harmonic Analysis.

The classical theory of the Fourier series copes with a decomposition of this function into sinusoidal waves. Not like these continuous waves the Walsh functions are rectangular waves. The growth of the theory of the Walsh-Fourier series has been strongly makes an effect by the classical theory of the trigonometric series. Therefore, it is impossible not to find a similarity between the Walsh series to those on the trigonometric series. These theories have much in common but the differences as well. A lot of these can be cleared by modern abstract harmonic analysis, which investigates orthonormal systems from the point of view of the structure of a topological group.

Many excellent results have been proven in such new areas of research as related to Wavelets Theory, Time-Frequency Analysis, Abstract Harmonic Analysis, Fast Fourier Transform, Gabor Theory, etc. These scientific achievements are important not only for the development of these theories, but also for their applications in mathematics, programming, and other fields such as the theory of signal transmission, digital signal processing, image to improve quality, multiplexing, filtering, coding theory and pattern recognition.

The purpose of my thesis is to investigate and increase the newest results of this great theory that relates to modern harmonic analysis and sing the obtained results in the study of various issues. In particular, we investigate the boundedness of subsequences of partial sums, N\"orlund logarithmic means and N\"orlund means with respect to the Walsh system and their maximal operators and restricted maximal operators on Hardy martingale H_p spaces.

The thesis contains three chapters:

- Basic definitions and notations and auxiliary lemmas
- Martingale Hardy spaces and partial sums with respect to the Walsh-Fourier series
- Martingale Hardy spaces and N\"orlund means with respect to the Walsh-Fourier series

We now carry on separately to give detailed account the content of each of the chapters.

In Chapter 1 we first talk about some basic definitions, notations of Walsh (dyadic) group, Rademacher and Walsh system and basic facts about partial sums with respect to the Walsh system, N\"orlund logarithmic means and N\"orlund means that are decisive for our further research. Moreover, we define Lebesgue and $L_{p,\infty}$ spaces and investigate the techniques that are very crucial for our further research. The final section of this chapter is dedicated to the theory of martingale Hardy spaces, where we state important theorem about atomic decomposition of this spaces when $0 < p \leq 1$ and several important examples of p -atom which helps us prove sharpness of our main results in the next sections.

Chapter 2 is fully dedicated to investigating and proving the boundedness of subsequences of partial sums with respect to the Walsh system, their limited maximal operators and weighted maximal operators on H_p spaces, for $0 < p \leq 1$. The case of $0 < p < 1$ is particularly interesting when we study both strong (H_p, L_p) and weak (H_p, L_p) type inequalities for weighted maximal operators with optimal weights. We also show the sharpness of all our main results in this Chapter. Using proven results, we obtain new results, but in concrete cases, we also get some well-known results.

In Chapter 3 we investigate and show the boundedness of subsequences of N\"orlund logarithmic means and their restricted maximal operators on H_p spaces. Next, we investigate more general summability methods which are named N\"orlund means in literature and prove similar results for this general methods. In particular, we obtain several interesting results in this area. Since Fej\'er means and Ces\'aro means are famous samples of N\"orlund means some famous and new results are pointed out in these special cases.

Novelty and uniqueness of the research

Let denote the discrete group $Z_2 := \{0,1\}$ with the mod m_k addition as the group operation. Let $G := \bigtimes_{k=0}^{\infty} Z_2$. Then every $x \in G$ can be represented by a sequence $x = (x_i, i \in \mathbb{N})$ where

$x_i \in Z_2 \left(i \in \mathbb{N} \right)$. The group operation on G is the coordinate-wise addition.

For any natural number $n \in \mathbb{N}$ can be uniquely expressed as $n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i \ \left(n_i \in \{0,1\}, i \in \mathbb{N} \right)$, where only a finite number of n_i differ from zero.

Set

$$|n| := \max\{ j \in \mathbb{N}, n_j = 0\}, \quad \langle n \rangle := \min\{ j \in \mathbb{N}, n_j = 0\},$$

$$\rho(n) = |n| - [n]$$

and

$$V(n) := n_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |n_k - n_{k-1}|, \text{ for any } n \in \mathbb{N} .$$

Moreover, for any natural numbers $\{n_{s_j}\}, j = 1, 2, \ldots, r,$ satisfying

$$2^s \le n_{s_1} \le n_{s_2} \le \ldots \le n_{s_r} < 2^{s+1}, \quad s \in \mathbb{N},$$

we define numbers

$$s_- := \min\left\{ \left[n_{s_j} \right] \right\}, \qquad s_+ := \max\left\{ \left| n_{s_j} \right| \right\} = s$$

and

$$\rho_s \left(n_{s_j} \right) := s_+ - s_-. \tag{2.1}$$

Moreover, if

$$2^s \le n_{s_j} \le 2^{s+1}, \quad j = 1, \ldots r, \quad s \in \mathbb{N},$$

which can be written as

$$n_{s_j} = \sum_{i=1}^{r_{s_j}} \sum_{k=l_i^{s_j}}^{t_i^{s_j}} 2^k,$$

where

$$0 \le l_1^{s_j} \le t_1^{s_j} \le l_2^{s_j} - 2 < l_2^{s_j} \le t_2^{s_j} \le \ldots \le l_{r_j}^{s_j} - 2 < l_{r_j}^{s_j} - 2 < l_{r_{s_j}}^{s_j} \le t_{r_{s_j}}^{s_j},$$

we define

$$A_s := \left\{ l_1^{s_j}, l_2^{s_j}, \ldots, l_{r_s^1}^{s} \right\} \bigcup \left\{ t_1^s, t_2^s, \ldots, t_{r_s^2}^s \right\} = \left\{ u_1^s, u_2^s, \ldots, u_{r_s^3}^s \right\},$$

where

$$u_1^s < u_2^s < \ldots < u_{r_s^3}^s \text{ და } t_{r_{s_j}}^{s_j} = s \in A_s, \text{სადაც } j = 1, 2, \ldots, r.$$

We also denote the cardinality of the set A_s by $|A_s|$, that is

$$|A_s| := card\left(A_s\right) + 1.$$

By this definition we can conclude that

$$|A_s| = r_s^3 \le r_s^1 + r_s^2 + 1.$$

It is evident that

$$\sup_{s \in \square} |A_s| < \infty,$$

if and only if the sets

$$\{n_{s_1}, n_{s_2}, \cdots, n_{s_r}\}$$

are uniformly finite for all $s \in \mathbb{N}_+$ and each n_{s_j} has bounded $V(n_{s_j})$ variation, i.e. that

$$V(n_{s_j}) < c < \infty, \text{ for all } j = 1, 2, \ldots, r.$$

The n th generalized Rademacher functions on G are defined by

$$r_n(x) := (-1)^{x_k} \quad (x \in G \quad n \in \mathbb{N}).$$

The n th Walsh function is defined as

$$w_n := \prod_{j=0}^{\infty} r_j^{n_j}, (n \in \mathbb{N}).$$

The system $w := (w_n : n \in \mathbb{N})$ is called a Walsh system.

The norms (or quasi-norms) of the spaces $L_p(G)$ and $weak - L_p(G)$ are respectively defined by

$$\| f \|_{L_p(G)}^p := \int_G |f(x)|^p \, d\mu(x)$$

and

$$\| f \|_{L_{p,\infty}(G)}^p := \sup_{\lambda > 0} \lambda^p \mu\left(x \in G : |f(x)| > \lambda\right), \quad (0 < p < +\infty).$$

The partial sums of Walsh-Fourier series are defined as follows:

$$S_n(f; x) := \sum_{j=0}^{n-1} f(j)(x) \psi_j(x)$$

where the number

$$f(j) := \int_G f(x) \psi_j(x) \, d\mu(x)$$

is said to be the j th Walsh-Fourier coefficient of the function f.

Let $\{q_k : k \geq 0\}$ be a sequence of nonnegative numbers. The n-th Norlund means of Walsh-Fourier series of f is defined by

$$t_n f := \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_{n-k} S_k f, \qquad Q_n := \sum_{k=0}^{n-1} q_k$$

The maximal operators of Norlund means defined by:

$$t^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}} |t_n f|.$$

The Fejér means and their maximal operator with respect to Walsh-Fourier series are defined as follows:

$$\sigma_n f := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_j f, \qquad \sigma^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}} |\sigma_n f|.$$

Let define Cesaro menas and their maximal operator as:

$$\sigma_n^\alpha f := \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{j=1}^{n} A_{n-j}^{\alpha-1} S_j f, \qquad A_k^\alpha := \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k)}{k!}, \quad A_0^\alpha := 0,$$

and

$$\sigma^{\alpha,*} f := \sup_{n\in N} |\sigma_n^\alpha f|.$$

The n-th Norlund logarithmic mean and their maximal operators are defined by

$$L_n f := \frac{1}{l_n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k f}{n-k}, \qquad l_n := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$

and

$$L^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}} |L_n f|.$$

We say that sequence $\{b_k, k \geq 0\}$ is convex if

$$b_{n-1} + b_{n+1} - 2b_n \geq 0, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

We note that above menioned Fejer, Cesaro and Norlund logarithmic means are generated with convex sequences.

The σ-algebra generated by the sets

$$I_n(x) := \{y \in G : y = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, y_n, y_{n+1})\}$$

is denoted by $F_k(k \in N)$. Denote by $f = (f_n : n \in \mathbb{N})$ a one-parameter martingale with respect to $F_k(k \in N)$.

For $0 < p < \infty$, the Hardy martingale space consists of all martingales for which

$$\|f\|_{H_p} := \|f^*\|_{L_p} < \infty, \text{where } f^* = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| f^{(n)} \right|.$$

The concept of modulus of continuity in $H_p(G), (0 < p < \infty)$ is defined by

$$\omega_{H_p(G)}(1/2^k, f) := \|f - S_{2^k} f\|_{H_p(G)}.$$

Research methodology

According to the proposal aims and problems, methods of real analysis combined with methods of abstract and non-linear harmonic analysis together with the theory of approximation is widely used. Other research methods include the theory of function spaces and inequalities.

A function a is a p-atom, if there exists an interval I, such that

$$\int_{G_m} a d\mu = 0, \quad \|a\|_\infty \le \mu(I)^{-/p}, \quad \sup p(a) \subset I.$$

Weisz gave us a description of the space $H_p(G)$:

Lemma 3.1: A martingale $f=\left(f_n, n\in\square\right)$ is in $H_p\left(G\right)$ $(0<p\le 1)$ if and only if there exist a sequence $\left(a_k, k\in\square\right)$ of $p-$ atoms and a sequence $\left(\mu_k, k\in\square\right)$ of real numbers such that, for every $n\in\square$,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k S_{2^n}\left(a_k\right)=f^{(n)}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\left|\mu_k\right|^p<\infty. \tag{3.1}$$

Moreover, $\|f\|_{H_p(G)}\approx\inf\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\mu_k\right|^p\right)^{1/p}$, where infimum is taken over all decomposition of f the form of (3.1).

Using this theorem we can conclude:

Lemma 3.2: Suppose that an operator U is sub-linear and for some $0<p\le 1$

$$\int_{(G\setminus I)}\left|Ua(x)\right|^p d\mu(x)\le c_p<\infty,$$

for every p-atom a, where I denotes the support of the atom. If U is bounded from L_∞ to L_∞, then

$$\|Uf\|_{L_p(G)}\le c_p\|f\|_{H_p(G)}.$$

Lemma 3.3: Suppose that an operator U is sub-linear and for some $0<p\le 1$

$$\sup_{\lambda>0}\lambda^{p_0}\mu\left\{t\in\bar{J}:\left|Uf(t)\right|>\lambda\right\}\le c_{p_0}<\infty$$

for every p-atom a, where J denotes the support of the atom. If U is bounded from L_∞ to L_∞, then

$$\|Uf\|_{L_{p_0,\infty}}\le C_{p_0}\|f\|_{H_{p_0}}.$$

Moreover, if $p_0 < 1$, then, for any $f \in L_1(G)$,

$$y\mu\left\{x \in G: \left|Uf(t)\right| > y\right\} \le C\|f\|_1, \quad (\forall\, y > 0).$$

Research Actuality

It is well known that the Walsh system does not form bases in the space $L_1(G)$. Moreover, there exists a martingale in the Hardy space $H_p(G_m)$, such that

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n f\|_{L_p(G)} = \infty, \quad (0 < p \le 1).$$

Tephnadze [14] proved, that for any $0 < p \le 1$ and $f \in H_p(G)$, the weighted maximal operator $\tilde{S}^{*,\nabla}$, defined by

$$\tilde{S}^{*,\nabla} f := \sup_{n\in\mathbb{N}_+} \frac{|S_n f|}{(n+1)^{1/p-1} \log^{[p]}(n+1)},$$

where $[p]$ denotes the integer part of p, is bounded from the martingale Hardy $H_p(G)$ space to the Lebesgue space $L_p(G)$.

Moreover, for any $0 < p \le 1$, and any non-negative and non-decreasing $\varphi: \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}$ function, satisfying the condition

$$sup_{n\in\mathbb{N}_+} \frac{(n+1)^{1/p-1}}{\varphi(n)} = \infty,$$

there exist martingale $f \in H_p(G)$, such that

$$\left\| \sup_{n\in\mathbb{N}_+} \frac{|S_n f|}{\varphi(n)} \right\|_p = \infty.$$

Tephnadze [13] proved that if $f \in H_p(G) \quad (0 < p \le 1)$ and

$$\omega_{H_p(G)}\left(1/2^k, f\right) = o\left(1/\left(2^{k(1/p-1)} \log^{[p]} k\right)\right), \quad \text{as} \quad k \to \infty,$$

then

$$\left\| S_n f - f \right\|_{L_p(G)} \to 0, n \to \infty$$

where [p] denotes integer part of p. Moreover, there exists a martingale $f \in H_p(0 < p \le 1)$, for which

$$\omega_{H_p(G)}\left(f, 1/2^k\right) = O\left(1/\left(2^{k(1/p-1)} \log^{[p]} k\right)\right), \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

and $S_n f$ do not converges to f in H_p norm.

Weisz [15] proved that maximal operator of Fejér means σ^* is bounded from $H_{1/2}(G)$ to $L_{1/2,\infty}(G)$. In Blahota, Gát and Goginava [9] proved that, there exists a martingale $f \in H_{1/2}(G)$, such that

$$\sup_{n\in N} \left\| \sigma^* f \right\|_{L_p(G)} = \infty.$$

Tephnadze [11] proved, that for any $0 < p \le 1/2$ and $f \in H_p(G)$, the weighted maximal operator $\tilde{\sigma}^{*,\nabla}$, defined by

$$\tilde{\sigma}^{*,\nabla} f := \sup_{n\in\mathbb{N}_+} \frac{|\sigma_n f|}{(n+1)^{1/p-2} \log^{2[p+1/2]}(n+1)},$$

where $[p]$ denotes integer part of p, is bounded from the martingale Hardy $H_p(G)$ space to the Lebesgue space $L_p(G)$.

Moreover, for any $0 < p \le 1$, and any positive and non-decreasing $\varphi : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{R}$ function, satisfying the condition

$$sup_{n\in\mathbb{N}_+} \frac{(n+1)^{1/p-1}}{\varphi(n)} = \infty,$$

there exist martingale $f \in H_p(G)$, such that

$$\left\| \sup_{n\in\mathbb{N}_+} \frac{|S_n f|}{\varphi(n)} \right\|_p = \infty.$$

Tephnadze [12] proved that if $0 < p \le 1/2$ and

$$\omega_{H_p(G)}\left(1/2^k, f\right) = o\left(1/\left(2^{k(1/p-2)} \log^{2[p+1/2]} k\right)\right), \quad \text{as} \quad k \to \infty,$$

then

$$\left\|\sigma_n f - f\right\|_{L_p(G)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Moreover, there exists a martingale $f \in H_p(G)$, such that

$$\omega_{H_p(G)}\left(f, 1/2^n\right) = O\left(1/(2^{n(1/p-2)} \log^{2[p+1/2]} n)\right), \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

and

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\|\sigma_n f - f\right\|_{L_p(G)} > c > 0.$$

Goginava [8] proved that there exists a martingale $f \in H_p$, such that the maximal operators of Norlund logarithmic mean are not bounded in the space L_p. In particular, there exists a martingale $f \in H_p$, such that

$$\left\|L^* f\right\|_p = +\infty.$$

Hardy type inequalities and boundedness of weighted maximal operators of the t_n means on the Hardy spaces and their summability of some general methods were considered by Blahota, Goginava, Gat, Memich, Nagy, Person, Tephnadze, Wall, Weisz and in the works of other authors.

Research goals and objectives

In this section we state main results of my PhD thesis. For the partial sums of the Walsh-Fourier series we in [4] proved that:

Theorem 4.1: Let $0 < p < 1$ and $f \in H_p(G)$. Then the weighted maximal operator $\tilde{S}^{*,\nabla}$, defined by

$$\tilde{S}^{*,\nabla} f = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|S_n f|}{2^{\rho(n)(1/p-1)}}, \tag{4.1}$$

is bounded from the martingale Hardy space $H_p(G)$ to the space $\text{weak} - L_p(G)$.

in [4] we also proved that Theorem 4.1 can not be improved in general because it is sharp in some special senses:

Theorem 4.2: a) Let $0 < p < 1$ and $\tilde{S}^{*,\nabla}$ be defined by (4.1). Then there exists a sequence $\{ f_n, n \in \mathbb{N} \}$ of p-atoms, such that

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\left\|\tilde{S}^{*,\nabla} f_n\right\|_p}{\left\| f_n\right\|_{H_p}} = \infty.$$

b) Let $0 < p < 1$. If $\varphi : \mathbb{N} \to [1, \infty)$ is a nondecreasing function, satisfying the condition

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{2^{\rho(k)(1/p-1)}}{\varphi_k} = \infty,$$

then there exists a sequence $\{ f_n, n \in \mathbb{N} \}$ of p-atoms, such that

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\left\| \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_k f_n|}{\varphi_k} \right\|_{L_{p,\infty}}}{\left\| f_n\right\|_{H_p}} = \infty.$$

Theorem 4.1. implies the following result of Weisz:

Corollary 4.3: Let $0 < p < 1$ and $f \in H_p(G)$. Then the maximal operator $S^{*,\mathbb{N}}$ defined by

$$S^{*,\mathbb{N}} f := \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| S_{2^k} f \right|$$

is bounded from the Hardy space $H_p(G)$ to the Lebesgue space $\text{weak} - L_p(G)$ (and, thus, to the Lebesgue space $L_p(G)$).

Moreover, Theorems 1 and 2 imply the following results:

Corollary 4.4: Let $0 < p < 1$ and $f \in H_p(G)$. Then the maximal operator $\tilde{S}^{*,\mathbb{N}}$, defined by

$$\tilde{S}^{*,\square} f := \sup_{k\in\square} \left| S_{m_k} f \right|$$

is bounded from the Hardy space $H_p(G)$ to the Lebesgue space $\text{weak} - L_p(G)$ if and only if condition

$$\sup_{k\in\square} \rho\left(m_k\right) < c < \infty$$

is fulfilled.

Our first main result reads:

In [5] we proved that

Theorem 4.6: Let $0 < p < 1$, $f \in H_p\left(G\right)$ and $\varphi : \square_+ \to \square_+$ be any nonnegative and nondecreasing function satisfying the condition

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_k^p} < c < \infty. \tag{4.2}$$

Then the weighted maximal operator $\tilde{S}^{*,\nabla}$, defined by

$$\tilde{S}^{*,\nabla} f = \sup_{n\in\square} \frac{\left| S_n f \right|}{2^{\rho(n)(1/p-1)\varphi_{\rho(n)}}},$$

is bounded from the Hardy space $H_p(G)$ to the Lebesgue space $L_p(G)$.

Theorem 4.6 can be of special interest even if we restrict to subsequences.

Theorem 4.7: Let $0 < p < 1$, $f \in H_p(G)$, $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ be any nonnegative and nondecreasing function satisfying the condition (4.2) and $\{m_k : k \geq 0\}$ be any sequence of positive numbers. Then the weighted maximal operator $\tilde{S}^{*,\nabla}$, defined by

$$\tilde{S}^{*,\nabla} f = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{\left| S_{m_k} f \right|}{2^{\rho(m_k)(1/p-1)} \varphi_{\rho(m_k)}},$$

is bounded from the Hardy space $H_p(G)$ to the Lebesgue space $L_p(G)$.

We also prove sharpness of Theorem 4.6:

Let $0 < p < 1$, $\{n_k : k \geq 0\}$ be a sequence of positive numbers and $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ be any nonnegative and nondecreasing function satisfying the condition

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_k^p} = \infty.$$

Then there exists p-atoms a_k, such that

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\left\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|S_n f_k|}{2^{\rho(n)(1/p-1)}\varphi_{\rho(n)}}, \right\|_p}{\|f_k\|_{H_p}} = \infty.$$

Theorem 4.6 and Theorem 4.7 imply the following sharp result:

Corollary 4.8: a) Let $0 < p < 1$ and $f \in H_p(G)$. Then the weighted maximal operator $\tilde{S}^{*,\nabla,\varepsilon}$, defined by

$$\tilde{S}^{*,\nabla,\varepsilon} f := \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_k f|}{2^{\rho(k)(1/p-1)} \left(\rho(k)\log^{1+\varepsilon} \rho(k)\right)^{1/p}},$$

is bounded from the Hardy space $H_p(G)$ to the Lebesgue space $L_p(G)$, when $\varepsilon > 0$ and is not bounded from the Hardy space $H_p(G)$ to the Lebesgue space $L_p(G)$, when $\varepsilon = 0$.

In [2] we proved that

Theorem 4.9: Let $0 < p < 1$, $f \in H_p(G)$ and $\{n_k : k \geq 0\}$ be a sequence of positive numbers and let $\{n_{s_i} : 1 \leq i \leq r\} \subset \{n_k : k \geq 0\}$ be numbers such that

$$2^s \leq n_{s_1} \leq n_{s_2} \leq \ldots \leq n_{s_r} \leq 2^{s+1}, \; s \in \mathbb{N}.$$

Then the weighted maximal operator $\tilde{S}^{*,\nabla}$, defined by

$$\tilde{S}^{*,\nabla} f := \sup_{s\in\mathbb{N}} \sup_{2^s \leq m_{s_i} < 2^{s+1}} \frac{\left|S_{m_{s_i}} f\right|}{2^{\rho_s(m_{s_i})(1/p-1)}},$$

is bounded from the Hardy space $H_p(G)$ to the Lebesgue space $L_p(G)$.

In [2] we also proved sharpness of this result:

Theorem 4.10: Let $0 < p < 1$, $f \in H_p(G)$ and $\{n_k : k \geq 0\}$ be a sequence of positive numbers and let $\{n_{s_i} : 1 \leq i \leq r\} \subset \{n_k : k \geq 0\}$ be numbers such that $2^s \leq n_{s_1} \leq n_{s_2} \leq \ldots \leq n_{s_r} \leq 2^{s+1}, s \in \mathbb{N}$.

Then for any nonnegative and nondecreasing function

$$sup_{s\in\mathbb{N}} \sup_{2^s \leq m_{s_i} < 2^{s+1}} \frac{2^{\rho_s(m_{s_i})(1/p-1)}}{\varphi(m_{s_i})} = \infty,$$

there exists p-atoms f_s, such that

$$\sup_{s\in\mathbb{N}} \frac{\left\| \sup_{2^s \leq m_{s_i} < 2^{s+1}} \frac{\left| S_{m_{s_i}} f_s \right|}{\varphi(m_{s_i})} \right\|_p}{\| f_s \|_{H_p}} = \infty.$$

In order to be able to compare with some other results in the literature we also state the following:

Corollary 4.11: Let $p > 0$ and $f \in H_p(G)$. Then the restricted maximal operators $\tilde{S}_2^{*,\mathbb{N}}$, defined by

$$\tilde{S}_2^{*,\square} f := \sup_{k\in\square} \left| S_{2^k+2^{k-1}} f \right|,$$

Both are bounded from the Hardy space $H_p(G)$ to the Lebesgue space $L_p(G)$.

Corollary 4.12: Let $0 < p < 1$ and $f \in H_p(G)$. Then the restricted maximal operator $\tilde{S}_i^{*,\nabla}$, $i = 3,4,$ defined by

$$\tilde{S}_3^{*,\nabla} f := \sup_{k\in\square} \frac{\left| S_{2^k+2^{[k/2]}} f \right|}{2^{k(1/p-1)/2}}$$

and

$$\tilde{S}_4^{*,\nabla} f := \sup_{k\in\square} \frac{\left| S_{2^k+2^{[k/3]}} f \right|}{2^{\frac{2}{3}k(1/p-1)}},$$

Both are bounded from the Hardy space $H_p(G)$ to the Lebesgue space $L_p(G)$.

Now we consider case $p = 1$.

In [1] we proved that

Theorem 4.13: a) Let $f \in H_1$. Then the weighted maximal operator $\tilde{S}^{*,\nabla}$, defined by

$$\tilde{S}^{*,\nabla} f := \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_k f|}{V(k)} \tag{4.3}$$

is bounded from the Hardy space H_1 to the space $L_{1,\infty}$.

b) Let $f \in H_1$. Then the weighted maximal operator $\tilde{S}^{*,\nabla}$, defined by (4.3) is not bounded from the Hardy space H_1 to the space L_1.

In [3] we proved that

Theorem 4.14: a) Let $0 < p < 1$. Then, for any nonnegative and nondecreasing function $\varphi : \mathbb{N} \to [1, \infty)$ satisfying the condition

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{2^{\rho(\alpha_k)(1/p-1)}}{\varphi_{\alpha_k}} = \infty,$$

there exists a martingale $f \in H_p(G)$, such that

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \frac{S_{\alpha_k} f}{\varphi_{\alpha_k}} \right\|_{L_{p,\infty}} = \infty.$$

b) Let $0 < p < 1$ and $\{n_k : k \geq 0\}$ is a sequence of positive numbers and let

$$\{n_{s_i} : 1 \leq i \leq r\} \subset \{n_k : k \geq 0\}$$

be numbers such that

$$2^s \leq n_{s_1} \leq n_{s_2} \leq \ldots \leq n_{s_r} \leq 2^{s+1}, \; s \in \mathbb{N}.$$

Then, for any nonnegative and nondecreasing function $\varphi:\mathbb{N}\to[1,\ \infty)$ satisfying the condition

$$\sup_{s\in\mathbb{N}}\ \sup_{2^s\le m_{s_i}<2^{s+1}}\frac{2^{\rho_s\left(m_{s_i}\right)(1/p-1)}}{\varphi(m_{s_i})}=\infty,$$

there exists a martingale $f\in H_p(G),$ such that the maximal operator, defined by

$$\sup_{s\in\mathbb{N}}\ \sup_{2^s\le n_{s_i}<2^{s+1}}\frac{\left|S_{n_{s_i}}f\right|}{\varphi(n_{s_i})}$$

is not bounded from the martingale Hardy space $H_p(G)$ to the Lebesgue space $L_p(G)$.

c) Let $0<p<1$ and $\{n_k:k\ge 0\}$ is a sequence of positive numbers. Then, for any nonnegative and nondecreasing function $\varphi:\mathbb{N}\to[1,\ \infty)$ satisfying the condition

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi_k^p}=\infty,$$

there exists a martingale $f\in H_p(G),$ such that the maximal operator, defined by

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{\left|S_n f\right|}{2^{\rho(n)(1/p-2)}\varphi(\rho(n))}$$

is not bounded form the martingale Hardy space $H_p(G)$ to the Lebesgue space $L_p(G)$.

Next we investigate boundedness Norlund logarithmic means in the martingale Hardy $H_p(G)$ spaces:

Let $0 < p < 1$. Then there exists a martingale $f \in H_p$ such that

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| L_{2^n} f \right\|_{L_{p,\infty}} = \infty.$$

In [7] we proved that

Theorem 15: Let $0 < p < 1$. there exists a martingale $f \in H_p(G)$, such that

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| L_{2^n} f \right\|_{L_{p,\infty}} = \infty.$$

Corollary 16: Let $0 < p < 1$. Then the maximal operator defined by

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| L_{2^n} f \right|$$

is not bounded form the martingale Hardy space $H_p(G)$ to the space $L_{p,\infty}(G)$ ($L_p(G)$).

Finally, we investigate boundedness Norlund means in the martingale Hardy $H_p(G)$ spaces and In [6] we proved that:

Theorem 17: Let $0 \le \alpha \le 1$, β be any non-negative real number and t_n be N\"{o}rlund means with convex and non-increasing sequence $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ satisfying the condition

$$\frac{q_1 - (3/2)q_3}{Q_n} \ge \frac{C}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n},$$

for some positive constant C. Then, for any $0 < p < 1/(1+\alpha)$ there exists a martingale $f \in H_p$ such that

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| t_{2^n} f \right\|_{L_{p,\infty}} = \infty.$$

Corollary 18: Let $0 < p < 1/(1+\alpha)$, where $0 < \alpha \le 0.56$. Then, for an $0 < p < 1/(1+\alpha)$ there exists a martingale $f \in H_p$ such that

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \sigma_{2^k}^{\alpha} f \right\|_{L_{p,\infty}} = \infty.$$

Corollary 19: Let $0 < p < 1/(1+\alpha)$, where $0 < \alpha \le 0.56$. Then the maximal operator defined by

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \sigma_{2^k}^{\alpha} f \right|$$

is not bounded form the martingale Hardy space $H_p(G)$ to the space $L_{p,\infty}(G)$ ($L_p(G)$).

Used literature

[1] *D. Baramidze,* A note on some weighted maximal operators of partial sums of Walsh-Fourier series, Acta Math. Acad. Paedagog., (to appear).

[2] *D. Baramidze,* Martingale Hardy spaces and some new weighted maximal operators of partial sums of Walsh-Fourier series, Georgian Math. J., (submitted).

[3] *D. Baramidze,* Martingale Hardy spaces and divergence of maximal operators associated with Walsh-Fourier series, (submitted).

[4] *D. Baramidze, L.-E. Persson, H. Singh, G. Tephnadze,* Some new weak (*Hp–Lp*) type inequality for weighted maximal operators of partial sums of Walsh-Fourier series, Mediterr. J. Math., 20 no. 5, paper no. 28, (2023), 13 pp.

[5] *D. Baramidze, L.-E. Persson, G. Tephnadze,* Some new (*Hp –Lp*) type inequalities for weighted maximal operators of partial sums of Walsh-Fourier series, Positivity, 27 no 3, paper no. 38, (2023), 14 pp.

[6] *D. Baramidze, L.-E. Persson, K. Tangrand, G. Tephnadze,* (*Hp – Lp*)-Type inequalities for subsequences of Norlund means of Walsh ¨ –Fourier series, J. Inequal. Appl., paper no. 52, (2023), 13 pp

[7] *D. Baramidze, L.-E. Persson, H. Singh, G. Tephnadze,* On the convergence and divergence of subsequence of Norlund

logarithmic means of Walsh-Fourier series, J. Inequal. Appl., paper no. ¨30, (2022), 13 pp.

[8] *G. G ̀ at, U. Goginava,* On the divergence of Norlund logarithmic means of Walsh-Fourier series, ¨Acta Math. Sin., 25. no. 6, (2009), 903-916

[9]*U. Goginava,* Maximal operators of Fejer means of double Walsh-Fourier series, Acta Math. ´ Hungar., 115, no. 4, (2007), 333-340.

[10] *L.-E. Persson, G. Tephnadze, F. Weisz,* Martingale Hardy Spaces and Summability of onedimensional Vilenkin-Fourier Series, Birkhauser/Springer, 2022.

[11] *G. Tephnadze,* On the maximal operators of Vilenkin-Fejer means on Hardy spaces, Math. Inequal. Appl., 16, no. 1, (2013), 301-312

[12] G. Tephnadze, A note on the norm convergence by Vilenkin-Fejer means, Georgian Math. J., ´21, no. 4, (2014), 511-517.

[13] *G. Tephnadze,* On the partial sums of Vilenkin-Fourier series, J. Contemp. Math. Anal., 49, no.
1, (2014), 23-32.

[14] *G. Tephnadze,* On the Vilenkin-Fourier coefficients, Georgian Math. J., 20 no. 1, (2013), 169-
177

[15] *F. Weisz,* Weak type inequalities for the Walsh and bounded Ciesielski systems, Anal. Math.,
30, no. 2, (2004), 147-160.