საქართველოს უნივერსიტეტი
და
ნორვეგიის არქტიკული უნივერსიტეტი

კერძო ჯამების და ნორლუნდის საშუალოების ქვემიმდევრობების და მათი მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობა ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებზე

დავით ბარამიძე

davit.baramidze@ug.edu.ge

სადოქტორო ნაშრომი

საქართველოს უნივერსიტეტის მათემატიკის ინსტიტუტი
მეცნიერების და ტექნოლოგიების სკოლა

სადისერტაციო ნაშრომი შესრულებულია საქართველოს უნივერსიტეტის მეცნიერების და ტექნოლოგიების სკოლის მათემატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: გიორგი ტეფნაძე

თბილისი

2024

დავით ბარამიძე

სარჩევი

გვერდი

1 ძირითადი განმარტებები და აღნიშვნები და დამხმარე ლემები 8

1.1 უოლშის ჯგუფი და რადემახარის და უოლშის ფუნქციები 8

1.2 ნატურალური რიცხვების რიცხვითი მახასიათებლები 10

1.3 უოლშ-ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამები და დირიხლეს გული 11

1.4 ნორლუნდის საშუალოები და მათი მაგალითები 14

1.5 მარტინგალური ჰარდის სივრცეების თეორია 16

2 ჰარდის მარტინგალური სივრცეები და უოლშ-ფურიეს მწკრივების კერძო ჯამები 22

2.1 ზოგიერთი კლასიკური შედეგი უოლშ-ფურიეს მწკრივების კერძო ჯამებისთვის 22

2.2 უოლშ-ფურიეს მწკრივების კერძო ჯამების ქვემიმდევრობები და მათი მაქსიმალური ოპერატორები H_p სივრცეში 30

3 ჰარდის მარტინგალური სივრცეები და უოლშ-ფურიეს მწკრივების ნორლუნდის საშუალოები 57

3.1 ზოგიერთი კლასიკური შედეგი უოლშ-ფურიეს მწკრივების ნორლუნდის საშუალოებისთვის 57

3.2 უოლშ-ფურიეს მწკრივის ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების ქვემიმდევრობები და მათი მაქსიმალური ოპერატორები ლებეგის და ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებზე 70

3.3 უოლშ-ფურიეს მწკრივის ნორლუნდის საშუალოების ქვემიმდევრობები და მათი მაქსიმალური ოპერატორები ლებეგის და ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებზე 75

გამოყენებული ლიტერატურა **83**

დავით ბარამიძე

საკვანძო სიტყვები: უოლშის ორობითი ჯგუფი, უოლშის ორობითი სისტემა, ლებეგის L_p სივრცეები, $L_{p,\infty}$ სივრცეები, ფუნქციის უწყვეტობის მოდული ლებეგის სივრცეებში, უოლშ-ფურიეს მწკრივები, კერძო ჯამები, ნორლუნდის საშუალოები, ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოები, მარტინგალები, მარტინგალური ჰარდის სივრცეები, უწყვეტობის მოდული მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებში, მაქსიმალური ოპერატორები, შეზღუდული მაქსიმალური ოპერატორები, წონიანი მაქსიმალური ოპერატორები.

აბსტრაქტი

პრობლემატიკა, რომელიც შეისწავლება სადოქტორო ნაშრომში, ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ადგილი უკავია ფურიეს ანალიზში. კლასიკური ორთონორმირებული სისტემების მიმართ ინტეგრებადი ფუნქციის ფურიეს მწკრივის სხვადასხვა საშუალოებით შეჯამებადობის საკითხს დიდი ისტორია გააჩნია. ამ მიმართულებით მიღებული შედეგები არსებითად განსაზღვრავდნენ და ახლაც განსაზღვრავენ ფუნქციათა თეორიაში და ჰარმონიულ ანალიზში მთელი რიგი მიმართულებების პრობლემატიკას. ფურიეს მწკრივების კლასიკური თეორიიის გამოყენებით ფუნქცია იშლება უწყვეტ სინუსოიდურ ტალღებად. კლასიკური თეორიისგან განსხვავებით, უოლშის ფუნქციები წარმოადგენენ "მართკუთხა ტალღებს". ამ თეორიის განვითარებაზე ძლიერი გავლენა მოახდინა ტრიგონომეტრიული მწკრივების კლასიკურმა თეორიამ. აქედან გამომდინარე, შეუძლებელია უოლშის სისტემების მიმართ მიღებული შედეგები არ შევადაროთ ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ არსებულ ანალოგებს. ამ თეორიებს შორის ბევრი მსგავსებაა, თუმცა არსებობს მნიშვნელოვანი განსხვავებებიც. მათი დიდი ნაწილი აიხსნება თანამედროვე აბსტრაქტული ჰარმონიული ანალიზით, რომელიც სწავლობს ორთონორმალურ სისტემებს ტოპოლოგიური ჯგუფის სტრუქტურით. დამტკიცებულია არაერთი შესანიშნავი შედეგი კვლევის ისეთ ახალ მიმართულებებში, როგორებიცაა ვეივლეტ ანალიზი, გაბორის თეორია, დროით-სიხშირული ანალიზი, ფურიეს სწრაფი გარდაქმნა, აბსტრაქტული ჰარმონიული ანალიზი და ა.შ. ეს სამეცნიერო წინსვლა მნიშვნელოვანია არა მხოლოდ ამ თეორიების განსავითარებლად, არამედ მათი გამოყენების კუთხით მათემატიკაში, პროგრამირებასა და სხვადასხვა სფეროებში, როგორებიცაა სიგნალის გადაცემის თეორია, ციფრული სიგნალის დამუშავება, მულტიპლექსირება, სურათის გაუმჯობესება, ფილტრაცია, კოდირების თეორია და ნიმუშების ამოცნობა და ა.შ..

ჩემი დისერტაციის მიზანია თანამედროვე ჰარმონიულ ანალიზთან დაკავშირებული ამ საინტერესო თეორიის უახლესი შედეგების განხილვა და განვითარება და მიღებული შედეგების გამოყენება სხვადასხვა საკითხების შესწავლისას. კერძოდ, ჩვენ შევისწავლით უოლშ-ფურიეს მწკრივების კერძო ჯამების, ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების და ნორლუნდის საშუალოების ქვემიმდევრობების და მათი შეზღუდული მაქსიმალური ოპერატორების და წონიანი მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობის საკითხებს ჰარდის მარტინგალურ H_p სივრცეებზე.

სადოქტორო ნაშრომი შეიცავს სამ თავს:

- ძირითადი განმარტებები და აღნიშვნები და დამხმარე ლემები
- ჰარდის მარტინგალური სივრცეები და უოლშ-ფურიეს მწკრივების კერძო ჯამები
- ჰარდის მარტინგალური სივრცეები და უოლშ-ფურიეს მწკრივების ნორლუნდის საშუალოები

დაწვრილებით ავღწეროთ თითოეული თავის ძირითადი შინაარსი.

პირველ თავში მოვიყვანთ ძირითად განმარტებებს და აღნიშვნებს უოლშის (ორობითი) ჯგუფის, რადემახარის და უოლშის ფუნქციების შესახებ, ასევე მოვიყვანთ კერძო ჯამების, ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების და ნორლუნდის საშუალოების განმარტებებს და საბაზისო თვისებებს, ამ თავში ასევე განხილულია, ლებეგის და $L_{p,\infty}$ სივრცეები და ის მეთოდები, რომლებიც მეტად მნიშვნელოვანია ჩვენი შემდგომი განხილვებისთვის. ამ თავის ბოლო სექცია მთლიანად მიძღვნილია ჰარდის

მარტინგალური სივრცეების თეორიას, სადაც ასევე მოყვანილია მნიშვნელოვანი თეორემა ჰარდის მარტინგალური სივრცეების ატომებით წარმოდგენის შესახებ, როცა $0 < p \leq 1$ და რამდენიმე კონკრეტული p-ატომი, რომლებიც შემდეგ თავებში დაგვეხმარება მიღებული შედეგების განუზოგადებლობის დამტკიცებაში.

მეორე თავი მთლიანად ეძღვნება უოლშის სისტემის მიმართ კერძო ჯამების ქვემიმდევრობების, მათი შეზღუდული მაქსიმალური ოპერატორების და წონიანი მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობის საკითხების შესწავლას H_p სივრცეებზე, როცა $0 < p \leq 1$. განსაკუთრებით საინტერესოა $0 < p < 1$ შემთხვევა, რა დროსაც შესწავლილია, როგორც ძლიერი (H_p, L_p), ისე სუსტი (H_p, L_p) ტიპის უტოლობები წონიანი მაქსიმალური ოპერატორებისთვის ოპტიმალური წონებით. შესწავლილია ამ თავში მიღებული შედეგების გაუძლიერებადობის საკითხებიც. დამტკიცებული შედეგების გამოყენებით, ახალ შედეგებთან ერთად, კერძო შემთხვევებში მივიღებთ ზოგიერთ ცნობილ შედეგსაც.

მესამე თავში განხილული იქნება უოლშის სისტემების მიმართ ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების და მათი ქვემიმდევრობების მიმართ შეზღუდული მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობის საკითხებს H_p სივრცეებზე. ამის შემდეგ, განხილული იქნება უფრო ზოგადი შეჯამებადობის მეთოდები, რომელიც ლიტერატურაში ცნობილია, როგორც ნორლუნდის საშუალოები და შესწავლილი იქნება იგივე ტიპის ამოცანები. ამ მიმართულებით მიღებული იქნება ბევრი ახალი შედეგი. ვინაიდან ფეიერის და ჩეზაროს საშუალოები არიან ნორლუნდის საშუალოების კონკრეტული მაგალითები, ჩვენ ასევე მივიღებთ ცნობილ შედეგებს ამ კერძო შემთხვევებში.

Abstract

The subject we discuss in this thesis is the main topic in Fourier Analysis. Summability of various means of Fourier series with respect to classical orthonormal systems of integrable functions has a great history. The results obtained in this direction essentially determine the problems in Function Theory and Harmonic Analysis. The classical theory of the Fourier series copes with a decomposition of this function into sinusoidal waves. Not like these continuous waves the Walsh functions are rectangular waves. The growth of the theory of the Walsh-Fourier series has been strongly makes an effect by the classical theory of the trigonometric series. Therefore, it is impossible not to find a similarity of the Walsh series to those on trigonometric series. These theories have much in common but the differences as well. A lot of these can be cleared by modern abstract harmonic analysis, which investigates orthonormal systems from the point of view of the structure of a topological group. A number of excellent results have been proven in such new areas of research as related to Wavelets Theory, Time-Frequency Analysis, Abstract Harmonic Analysis, Fast Fourier Transform, Gabor Theory, etc. These scientific achievements are important not only for the development of these theories, but also for their applications in mathematics, programming, and other fields such as the theory of signal transmission, digital signal processing, image to improve the quality, multiplexing, filtering, coding theory and pattern recognition.

The purpose of my thesis is to investigate and increase the newest results of this great theory that relates to modern harmonic analysis and sing the obtained results in the study of various issues. In particular, we investigate the boundedness of subsequences of partial sums, Nörlund logarithmic means and Nörlund means with respect to the Walsh system and their maximal operators and restricted maximal operators on Hardy martingale H_p spaces.

The thesis contains three chapters:

- Introduction
- Martingale Hardy spaces and partial sums with respect to the Walsh-Fourier series
- Martingale Hardy spaces and Nörlund means with respect to the Walsh-Fourier series

We now carry on separately to give detailed account the content of each of the chapters.

In Chapter 1 we first talk some basic definitions, notations of Walsh (dyadic) group, Rademacher and Walsh system and basic facts about partial sums with respect to Walsh system, Nörlund logarithmic means and Nörlund means that are decisive for our further research. Moreover, we define Lebesgue and $L_{p,\infty}$ spaces and investigate the technique which are very crucial for our further research. Final section of this chapter is dedicated to the theory of martingale Hardy spaces, where we state important theorem about atomic decomposition of this spaces when $0 < p \leq 1$ and several important examples of p-atom which helps us prove sharpness of our main results in the

next sections.

Chapter 2 is fully dedicated to investigating and proving the boundedness of subsequences of partial sums with respect to the Walsh system, their limited maximal operators and weighted maximal operators on H_p spaces, for $0 < p \leq 1$. The case of $0 < p < 1$ is particularly interesting when we study both strong (H_p, L_p) and weak (H_p, L_p) type inequalities for weighted maximal operators with optimal weights. We also show the sharpness of all our main results in this Chapter. Using proven results, we obtain new results, but in concrete cases, we also get some well-known results.

In Chapter 3 we investigate investigate and show the boundedness of subsequences of Nörlund logarithmic means and their restricted maximal operators on H_p spaces. Next, we investigate more general summability methods which are named Nörlund means in literature and prove similar results for this general methods. In particular, we obtain several interesting results in this area. Since Fejér means and Cesáro means are famous samples of Nörlund means some famous and new results are pointed out in these special cases.

წინასიტყვაობა

სადოქტორო ნაშრომი წარმოდგენილია, როგორც მონოგრაფია და ეყრდნობა შემდეგ ძირითად პუბლიკაციებს:

[1] D. Baramidze, L.-E. Persson, H. Singh and G. Tephnadze, Some new weak $(H_p - L_p)$ type inequality for weighted maximal operators of partial sums of Walsh-Fourier series, Mediterr. J. Math., 20 (2023), no. 5, paper no. 28, 13 pp.

[2] D. Baramidze, L.-E. Persson and G. Tephnadze, Some new $(H_p - L_p)$ type inequalities for weighted maximal operators of partial sums of Walsh-Fourier series, Positivity, 27 (2023), no 3, paper no. 38, 14 pp.

[3] D. Baramidze, L.-E. Persson, K. Tangrand and G. Tephnadze, $(H_p - L_p)$-Type inequalities for subsequences of Nörlund means of Walsh–Fourier series, J. Inequal. Appl., (2023), paper no. 52, 13 pp.

[4] D. Baramidze, L.-E. Persson, H. Singh, G. Tephnadze, On the convergence and divergence of subsequence of Nörlund logarithmic means of Walsh-Fourier series, J. Inequal. Appl., (2022), paper no. 30, 13 pp.

[5] D. Baramidze, A note on some weighted maximal operators of partial sums of Walsh-Fourier series, Acta Math. Acad. Pedagog. Nyíreg., 9 pp. (to appear).

[6] D. Baramidze, Martingale Hardy spaces and some new weighted maximal operators of partial sums of Walsh-Fourier series, Georgian Math. J., 12 pp. (to appear).

[7] D. Baramidze, Martingale Hardy spaces and divergence of maximal operators associated with Walsh-Fourier series, 12 pp. (submitted).

სადოქტორო დისერტაციაში გამოყენებული სტატიების გარდა, გამოქვეყნებული მაქვს რამდენიმე სამეცნიერო პუბლიკაცია, რომლებიც არ არის გამოყენებული ამ თეზისში, მაგრამ მათი ნახვა შესაძლებელია გამოყენებულ ლიტერატურაში: [1], [7], [8], [9], [10], [11], [16].

მადლობა მინდა მოვუხადო ჩემს სამეცნიერო ხელმძღვანელებს გიორგი ტეფნაძეს და ლარს-ერიკ პერსონს ჩემდამი გამოჩენილი დიდი ყურადღებისათვის, მათი მუდმივი მხარდაჭერისა და დახმარებისთვის.

მადლობა ჩემს კოლეგებს საქართველოს უნივერსიტეტის და ნორვეგიის არქტიკული უნივერსიტეტის მათემატიკის დეპარტამენტებიდან, იმ თბილი და მეგობრული ატმოსფეროსთვის, რაც დამეხმარა კვლევების ეფექტურად წარმართვაში.

მინდა ავღნიშნო, საქართველოს უნივერსიტეტსა და ნორვეგიის არქტიკულ უნივერსიტეტს შორის საერთო სადოქტორო პროგრამის შესახებ გაფორმებული მემორანდუმი და მის ფარგლებში განხორციელებული სამეცნიერო თანამშრომლობა ძალიან მნიშვნელოვანი იყო ჩემი სამეცნიერო კვლევის საწყის საფეხურებზე.

მადლობას ვუხდი შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდს სადოქტორო პროგრამების გრანტის ფარგლებში გაცემული ფინანსური მხარდაჭერისთვის.

ბოლოს, მინდა მადლობა გადავუხადო ჩემს ოჯახს, სიყვარულის, მოთმინების, ურთიერთგაგებისა და მუდმივი თანადგომისთვის.

დავით ბარამიძე

1 ძირითადი განმარტებები და აღნიშვნები და დამხმარე ლემები

1.1 უოლშის ჯგუფი და რადემახარის და უოლშის ფუნქციები

$\mathbb{N}_+$-ით ავღნიშნოთ მთელი დადებითი რიცხვების სიმრავლე და $\mathbb{N} := \mathbb{N}_+ \cup \{0\}$. $\mathbb{R}$-ით და $\mathbb{R}_+$-ით ავღნიშნოთ შესაბამისად, ნამდვილ და დადებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეები. ასევე შევთანხმდეთ, რომ ყველგან ამ თეზისში, c-თი და C-თი აღნიშნულია აბსოლიტური მუდმივები, ხოლო c_p-თი და C_p-თი კი აბსოლიტური მუდმივები, რომლებიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე. სადოქტორო თეზისში ჩვენ ხშირად გამოვიყენებთ ამ მუდმივებს ასეთი კონკრეტიკის გარეშე.

ავღნიშნოთ Z_2-ით დისკრეტული ორობითი ჯგუფი $Z_2 := \{0, 1\}$. ამ სიმრავლეზე განსაზღვრულია ოპერაცია, რომელიც წარმოადგენს მოდულით 2 შეკრებას და რომლის მიმართაც ეს სიმრავლე არის ჯგუფი. Z_2-ის ყველა ქვესიმრავლე ღიაა. Z_2-ზე განვსაზღვროთ ზომა, ისე რომ თითოეული ელემენტის ზომა იყოს $1/2$.

ავღნიშნოთ G-თი ჯგუფი, რომელიც წარმოადგენს Z_2 ჯგუფების თვლად ნამრავლს (პირდაპირი ჯამი). განმარტების საფუძველზე, G ჯგუფის ელემენტებს აქვთ შემდეგი სახე

$$x := (x_0, x_1, \cdots, x_k, \cdots), \qquad x_k \in Z_2, \qquad (x_k = 0, 1).$$

ამ ჯგუფს უოლშის (ორობითი) ჯგუფი ეწოდება.

ჰაარის ზომა μ G-ზე ემთხვევა Z_2-ზე განსაზღვრული ზომების ნამრავლს, როცა $\mu(G) = 1$, ხოლო ტოპოლოგია G-ზე არის თითოეულ Z_2-ზე განსაზღვრული დისკრეტული ტოპოლოგიების თვლადი ნამრავლი (პირდაპირი ჯამი). G ტოპოლოგიური სივრცის ბაზისს წარმოადგენს შემდეგი ღია სიმრავლეების ერთობლიობა

$$I_0(x) := G,$$

$$I_n(x) := \{y \in G,\ y_0 = x_0,\ y_1 = x_1, \cdots, y_{n-2} = x_{n-2}, y_{n-1} = x_{n-1}\} \quad (x \in G,\ n \in \mathbb{N}).$$

ავღნიშნოთ $I_n := I_n(0)$ ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$-თვის და

$$\overline{I_n} := G \setminus I_n.$$

ცხადია, რომ ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას

$$\overline{I_M} = \left(\bigcup_{k=0}^{M-2} \bigcup_{l=k+1}^{M-1} I_{l+1}(e_k + e_l)\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=0}^{M-1} I_M(e_k)\right) = \bigcup_{k=0}^{M-1} I_k \setminus I_{k+1}. \tag{1.1.1}$$

$L_p(G)$ სივრცის ნორმა (ნახევრად-ნორმა, როცა $0 < p < 1$) განიმარტება შემდეგნაირად

$$\|f\|_p := \left(\int_G |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \qquad (0 < p < \infty).$$

$0 < p < \infty$-თვის $L_{p,\infty}(G)$ სივრცე შეიცავს ისეთ f ფუნქციებს, რომელთათვისაც

$$\|f\|_{L_{p,\infty}} := \sup_{\lambda>0} \lambda\mu\left(x \in G : |f| > \lambda\right)^{1/p} < \infty.$$

ლებეგის $L_p(G)$ სივრცეში $(1 \leq p < \infty)$ უწყვეტობის მოდული განიმარტება შემდეგნაირად

$$\omega_p\left(1/2^k, f\right) \quad := \sup_{0\leq|h|\leq 1/2^k} \|f(x+h) - f(x)\|_p .$$

ვიტყვით, რომ სუბწრფივი ოპერატორი U არის ძლიერი (p,p) ტიპის (ან უბრალოდ (p,p) ტიპის), თუ ის შემოსაზღვრულია $L_p(G)$-დან $L_p(G)$-ში, ანუ არსებობს მუდმივი C_p, ისეთი, რომ

$$\|Uf\|_p < C_p \|f\|_p .$$

ვიტყვით, რომ სუბწრფივი ოპერატორი U არის სუსტი (p,p) ტიპის, თუ ის შემოსაზღვრულია $L_p(G)$-დან $L_{p,\infty}(G)$-ში

$$\|Uf\|_{L_{p,\infty}} < C_p \|f\|_p .$$

$g \in L_1(G)$ და $h \in L_1(G)$ ინტეგრებადი ფუნქციების კონვოლუცია (ნახვევი) განიმარტება შემდეგნაირად:

$$(g * h)(x) := \int_G g(x+y)\, h(y)\, dt \quad (y \in G).$$

თუ $n \in \mathbb{N}$, მაშინ ის შეიძლება ცალსახად წარმოვადგინოთ შემდეგი ტოლობით

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_j 2^j$$

სადაც $n_j \in Z_2$ ყოველი $j \in \mathbb{N}$-თვის და მხოლოდ n_j-ების სარული რაოდენობა განსხვავდება ნულისგან.

ავღნიშნოთ k-ური რადემახარის ფუნქცია შემდეგნაირად

$$r_n(x) := (-1)^{x_n} \qquad (x \in G,\ n \in \mathbb{N}).$$

რადემახარის ფუნქციების საშუალებით G ჯგუფზე განვმარტოთ უოლშის (ორობითი) სისტემა $w := (w_n,\ n \in \mathbb{N})$ შემდეგი გზით:

$$w_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) \quad = \quad r_{|n|}(x)\,(-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1} n_k x_k} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

განმატებიდან ცხადი ხდება, რომ უოლშის ფუნქციები არიან უბან-უბან მუდმივი ფუნქციები და ისინი იღებენ მხოლოდ ორ მინშვნელობას ± 1.

უოლშის სისტემა არის ორთონორმირებული და სრული $L_2(G)$ სივრცეში (იხ. [71]).

1.2 ნატურალური რიცხვების რიცხვითი მახასიათებლები

ჩვენს კვლევებში ცენტრალურ როლს თამაშობს ნატურალური $n \in \mathbb{N}$ რიცხვის ორობითი წარმოდგენა

$$n=\sum_{k=0}^{\infty} n_j 2^j,\ n_j \in Z_2\ (j \in \mathbb{N}),$$

სადაც n_j-ის მხოლოდ სასრული რაოდენობა განსხვავდება ნულისაგან და ასევე მისი რიცხვითი მახასიათებლები $[n]$, $|n|$, $\rho(n)$, $V(n)$, რომლებიც განიმარტება შემდეგნაირად

$$|n| := \max\{k \in \mathbb{N},\ n_k \neq 0\}, \qquad [n] := \min\{k \in \mathbb{N},\ n_k \neq 0\},$$

$$\rho(n) = |n| - [n]$$

და

$$V(n) := n_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |n_k - n_{k-1}|, \quad \text{ნებისმიერი } n \in \mathbb{N} - \text{თვის}.$$

შევნიშნოთ, რომ $V(n)$-ის განმარტება გვხვდება შიპის, ვეიდის და სიმონის [71] წიგნში, სადაც შესწავლილია ლებეგის კონსტანტა ამ რიცხვითი მახასიათებლების გამოყენებით, ხოლო $\rho(n)$ მახასითებელი პირველად შემოიტანა ტეფნაძემ [87, 92], რათა შეესწავლა უოლშ-ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების და ფეიერის საშუალოების კრებადობა ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებში, რომლებსაც ჩვენ მოგვიანებით შევეხებით. ამ მიმართულებით განხორციელებული კვლევები ასევე გვხვდება მის შრომებში [83, 89–91], მის სადოქტორო დისერტაციებსა [81, 82] და წიგნში [69].

შემდეგი რიცხვითი მახასიათებლები შემოტანილია ჩემს შრომებში [5, 9] და უშუალოდ გამოიყენება სადოქტორო დისერტაციაში.

ნებისმიერი ნატურალური $\{n_{s_j}\}, j = 1, 2, \ldots, r$, რიცხვების მიმდევრობისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს

$$2^s \leq n_{s_1} \leq n_{s_2} \leq \cdots \leq n_{s_r} < 2^{s+1}, \quad s \in \mathbb{N},$$

ჩვენ ასევე განვმარტავთ შემდეგ რიცხვებს

$$s_- := \min\{[n_{s_j}]\}, \quad s_+ := \max\{|n_{s_j}|\} = s$$

და

$$\rho_s(n_{s_j}) := s_+ - s_-. \tag{1.2.1}$$

უფრო მეტიც, თუ

$$2^s \leq n_{s_j} \leq 2^{s+1},\ j = 1, \ldots r,\ s \in \mathbb{N},$$

რომელიც ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$n_{s_j}=\sum_{i=1}^{r_{s_j}}\sum_{k=l_i^{s_j}}^{t_i^{s_j}}2^k,$$

სადაც

$$0\le l_1^{s_j}\le t_1^{s_j}\le l_2^{s_j}-2<l_2^{s_j}\le t_2^{s_j}\le\cdots\le l_{r_j}^{s_j}-2<l_{r_{s_j}}^{s_j}\le t_{r_{s_j}}^{s_j},$$

მაშინ განვმარტოთ მათი ახალი რიცხვითი მახასიათებელი

$$A_s:=\left\{l_1^s,l_2^s,\cdots,l_{r_s^1}^s\right\}\bigcup\left\{t_1^s,t_2^s,\cdots,t_{r_s^2}^s\right\}=\left\{u_1^s,u_2^s,\cdots,u_{r_s^3}^s\right\},$$

სადაც

$$u_1^s<u_2^s<\cdots<u_{r_s^3}^s\quad\text{და}\quad t_{r_{s_j}}^{s_j}=s\in A_s,\quad\text{სადაც}\quad j=1,2,\cdots,r.$$

$|A_s|$-ით ავღნიშნოთ A_s სიმრავლის კარდინალური რიცხვი

$$|A_s|:=card(A_s)+1.$$

განმარტების საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ

$$|A_s|=r_s^3\le r_s^1+r_s^2+1.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$\sup_{s\in\mathbb{N}}|A_s|<\infty,$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სიმრავლეები

$$\{n_{s_1},n_{s_2},\cdots,n_{s_r}\}$$

არიან ერთობლივ შემოსაზღვრულები $s\in\mathbb{N}_+$-ის მიმართ და ყოველ n_{s_j} რიცხვს აქვს სასრული $V(n_{s_j})$ ვარიაცია, რაც ნიშნავს, რომ არსებობს მუდმივი c, რომლისთვისაც

$$V(n_{s_j})<c<\infty,\quad\text{ნებისმიერი}\quad j=1,2,\ldots,r-\text{თვის}.$$

1.3 უოლშ-ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამები და დირიხლეს გული

ამ თავში ჩვენ მოვიყვანთ ფურიეს ანალიზის რამდენიმე მიშვნელოვან განმარტებას ფურიეს კოეფიციენტების კერძო ჯამების და დირიხლეს გულის შესახებ, ჩამოვაყალიბებთ და სისრულისთვის დავამტკიცებთ რამდენიმე მნიშვნელოვან ლემას, რომლებიც რომლებიც არსებითად გამოიყენება თეზისში მიღებული შედეგების დამტკიცებისას შემდეგ თავებში.

თუ $f \in L_1(G)$, მაშინ განვმარტოთ უოლშის სისტემის მიმართ n-ური ფურიეს კოეფიციენტი, უოლშ-ფურიეს მწკრივის k-ური კერძო ჯამი და k-ური დირიხლეს გული შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &:= \int_G f w_n d\mu, \qquad (k \in \mathbb{N}),\\ S_k f &:= \sum_{j=0}^{k-1} \widehat{f}(j) w_j, \qquad (k \in \mathbb{N}_+),\\ D_k &:= \sum_{j=0}^{k-1} w_j, \qquad (k \in \mathbb{N}_+).\end{aligned}$$

ჩვენი შემდგომი კვლევებისთვის ასევე მნიშვნელოვანია ლებეგის n-ური კონსტანტის განმარტება:

$$L(k) := \|D_k\|_1 .$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$S_k f(x) = (f * D_k)(x).$$

როგორც ცნობილია (იხ. [3], [46] და [71]) ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$-თვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$D_{j+2^n} = D_{2^n} + w_{2^n} D_j = D_{2^n} + r_n D_j, \qquad j \le 2^n, \tag{1.3.1}$$

$$D_{2^n}(x) = \begin{cases} 2^n, & x \in I_n,\\ 0, & x \notin I_n,\end{cases} \tag{1.3.2}$$

და

$$D_n = w_n \sum_{k=0}^{\infty} n_k r_k D_{2^k} = w_n \sum_{k=0}^{\infty} n_k \left(D_{2^{k+1}} - D_{2^k}\right), \text{ სადაც } n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i. \tag{1.3.3}$$

(1.3.2)-ის და ორთონორმირებულობის ძალით მივიღებთ (იხ. [69])

$$\int_G D_n d\mu = 1, \qquad \|D_{2^n}\|_1 = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ტეფნაძემ [86]-ში დაამტკიცა შემდეგი ლემა:

ლემა 1.1. *დავუშვათ $x \in I_s \setminus I_{s+1}$, სადაც $s = 0, \cdots, N-1$. მაშინ*

$$\int_{I_N} |D_n(x+t)|\, d\mu(t) \le \frac{c2^s}{2^N},$$

სადაც c არის აბსოლუტური მუდმივი.

დამტკიცება. ვთქვათ $x \in I_s \setminus I_{s+1}$, სადაც $s = 0, \cdots, N-1$. (1.3.2) და (1.3.3) ტოლობების გამოყენებით

მივიღებთ

$$|D_n(x)| \leq \sum_{j=0}^{s} n_j 2^j \leq c2^s.$$

თუ $t \in I_N$ და $x \in I_s \setminus I_{s+1}$, სადაც $s = 0, \cdots, N-1$, მაშინ $x + t \in I_s \setminus I_{s+1}$ და

$$|D_n(x+t)| \leq c2^s,$$

საიდანაც საბოლოოდ მივიღებთ დასამტკიცებელ უტოლობას

$$\int_{I_N} |D_n(x+t)|\, d\mu(t) \leq \frac{c2^s}{2^N}.$$

დამტკიცება დასრულებულია. ■

ასევე მნიშვნელოვანია შემდეგი შეფასება, რომელსაც რამდენჯერმე გამოვიყენებთ (დეტალებისთვის იხ. [69]):

ლემა 1.2. *ვთქვათ* $n \in \mathbb{N}$, $[n] \neq |n|$ და $x \in I_{[n]} \setminus I_{[n]+1}$. *მაშინ*

$$|S_n(x)| \geq 2^{[n]}$$

და

$$\left|S_{n-2^{|n|}}(x)\right| \geq 2^{[n]}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $x \in I_{\langle n\rangle} \setminus I_{\langle n\rangle+1}$. (1.3.2) და (1.3.3) ტოლობებს მივიღებთ

$$\left|D_{n-2^{|n|}}\right| \geq \left|w_{n-2^{|n|}} D_{2^{\langle n\rangle}}\right| = D_{2^{\langle n\rangle}} = 2^{\langle n\rangle}.$$

ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ

$$|D_n| = 2^{\langle n\rangle},$$

რაც ასრულებს ლემის დამტკიცებას. ■

განვმარტოთ შემდეგი მაქსიმალური ოპერატორები

$$\begin{aligned} S^* f &= \sup_{k\in\mathbb{N}} |S_k f| \\ \widetilde{S}^*_{\#} f &= \sup_{k\in\mathbb{N}} |S_{2^k} f| \end{aligned}$$

1.4 ნორლუნდის საშუალოები და მათი მაგალითები

როგორც აბსტრაქტში ავღნიშნეთ, ფურიეს მწკრივების სხვადასხვა საშუალოებით შეჯამებადობის საკითხს დიდი ისტორია გააჩნია და ამ მიმართულებით მიღებული შედეგები არსებითად განსაზღვრავენ ფუნქციათა თეორიაში და ჰარმონიულ ანალიზში მთელი რიგი მიმართულებების პრობლემატიკას. ამ თავში ჩვენ ნორლუნდის საშუალოების განმარტებას მოვიყვანთ და რამდენიმე ისეთ კლასიკურ მაგალითსაც შევეხებით, როგორებიცაა ფეიერის და ჩეზაროს საშუალოები.

დავუშვათ $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ არაუარყოფით, ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობაა. ნორლუნდის საშუალო განიმარტება ტოლობით:

$$t_n f := \frac{1}{Q_n} \sum_{k=1}^{n} q_{n-k} S_k f, \quad Q_n := \sum_{k=0}^{n-1} q_k. \tag{1.4.1}$$

ცხადია, რომ

$$t_n f(x) = \int_G f(t) F_n(x+t) \, d\mu(t)$$

სადაც

$$F_n := \frac{1}{Q_n} \sum_{k=1}^{n} q_{n-k} D_k$$

ნორლუნდის გული ეწოდება.

ცნობილია (იხ. მორისი [54]) ნორლუნდის საშუალოების რეგულარულობის პირობები. კერძოდ, თუ $\{q_k : k \geq 0\}$ არის არაუარყოფით, ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა, $q_0 > 0$ და

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \infty,$$

მაშინ $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობით წარმოქმნილი (1.4.1) შეჯამებადობის მეთოდის რეგულარულობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_{n-1}}{Q_n} = 0. \tag{1.4.2}$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობა არის არაზრდადი, მაშინ ნორლუნდის საშუალო ყოველთვის რეგულარულია, მაგრამ თუ $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობა არის არაკლებადი, მაშინ ასეთი ნორლუნდის საშუალო ყოველთვის არაა რეგულარული.

როცა $\{q_k = 1 : k \in \mathbb{N}\}$, მაშინ მივიღებთ ფეიერის საშუალოებს

$$\sigma_n f := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} S_j f, \qquad (n \in \mathbb{N}_+).$$

ფეიერის გულები განიმარტება შემდეგნაირად

$$K_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} D_j, \qquad (n \in \mathbb{N}_+)\,.$$

(C, α)-საშუალოები შემდეგნაირად განიმარტება:

$$\sigma_n^\alpha f := \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{j=1}^{n} A_{n-j}^{\alpha-1} S_j f,$$

სადაც

$$A_k^\alpha := \frac{(\alpha+1)\cdots(\alpha+k)}{k!}, \quad (A_0^\alpha := 0)$$

სხვადასხვა ლიტერატურაში ეს შეჯამებადობის მეთოდი მოხსენიებულია, როგორც ჩეზაროს საშუალოები.

ცნობილია, რომ (იხ. ზიგმუნდი [111])

$$A_n^\alpha = \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k^{\alpha-1} \tag{1.4.3}$$

და

$$A_n^\alpha - A_{n-1}^\alpha = A_n^{\alpha-1}, \;\; A_n^\alpha \backsim n^\alpha. \tag{1.4.4}$$

ჩვენ ასევე განვმარტავთ U_n^α საშუალოებს

$$U_n^\alpha f := \frac{1}{Q_n}\sum_{j=1}^{n} (n+1-j)^{(\alpha-1)} S_j f,$$

სადაც

$$Q_n := \sum_{j=1}^{n} j^{\alpha-1}.$$

n-ური ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალო L_n შემდეგნაირად განიმარტება:

$$L_n f \quad := \quad \frac{1}{l_n}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{S_j f}{n-j},$$

სადაც

$$l_n := \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}.$$

განვმარტოთ V_n საშუალო შემდეგნაირად

$$V_nf := \frac{1}{Q_n}\sum_{j=1}^{n}\ln^{-1}(n+1-j)S_jf,$$

სადაც

$$Q_n := \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\ln(j+1)}.$$

ჩვენ ასევე განვსაზღვრავთ ნორლუნდის, ფეიერის, ჩეზაროს, ნორლუნდის ლოგარითმული და რისის საშუალოების მაქსიმალურ ოპერატორებს

$$\begin{aligned} t^*f &:= \sup_{k\in\mathbb{N}}|t_kf|, \\ \sigma^*f &:= \sup_{k\in\mathbb{N}}|\sigma_kf|, \\ \sigma^{\alpha,*}f &:= \sup_{k\in\mathbb{N}}|\sigma_k^{\alpha}f|, \\ L^*f &:= \sup_{k\in\mathbb{N}}|L_kf|, \\ U^{\alpha,*}f &:= \sup_{k\in\mathbb{N}}|U_k^{\alpha}f|, \\ V^*f &:= \sup_{k\in\mathbb{N}}|V_kf|. \end{aligned}$$

1.5 მარტინგალური ჰარდის სივრცეების თეორია

ამ თავში გადმოცემული მარტინგალური ჰარდის სივრცეების თეორია და მასთან დაკავშირებული საკითხები შესაძლებელია ნახოთ გიორგი ტეფნაძის [81] და გიორგი თუთბერიძის [96] სადოქტორო ნაშრომებში, ასევე ეს საკითხები აღწერილია წიგნებში [71] და [69]. ეს საკითხები ასევე მნიშვნელოვანია ჩვენი კვლევებისთვის, რომლებიც შემდეგ ორ თავში გამოვიყენებთ, ამიტომ ჩვენ დაწვრილებით ავღწერთ იგივე საკითხებს.

მარტინგალების ზოგადი განმარტება და ამ საკითხების ფუნდამენტური შესწავლა გადმოცემულია შემდეგ წიგნში [58]. მისი განმარტებისთვის საჭიროა პირობითი მათემატიკური ლოდინის განმარტება და მთელი რიგი თვისებების შესწავლა, თუმცა ამ ზოგადი თეორიის განხილვა მოცემულ თეზისში საჭიროებას არ წარმოადგენს, რადგან პირობითი მათემატიკური მეთოდი ჩვენი კონკრეტული σ-ალგებრებისთვის ემთხვევა უოლშ-ფურიეს მწკრივის S_{2^k} კერძო ჯამებს. სწორედ ამიტომ შემოვიფარგლებით ამ კონკრეტული საკითხების განხილვით.

σ-ალგებრა, წარმოქმნილი $\{I_n(x),\ x\in G\}$ ორობითი ინტერვალებით, აღვნიშნოთ $F_n\ (n\in\mathbb{N})$-ით.

ვიტყვით, (იხ. წიგნები [69] და [102]) რომ ინტეგრებადი $f^{(k)}$ ფუნქციების $f=\left(f^{(k)},k\in\mathbb{N}\right)$ მიმდევრობა არის მარტინგალი $F_k\ (k\in\mathbb{N})$ σ-ალგებრათა ნაკადის მიმართ, თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა

$f^{(k)}$ არის F_k ზომადი ყოველი $k\in\mathbb{N}$-სთვის,

$S_{2^k}f^{(n)}=f^{(k)}$ ყოველი $k\le n$-სთვის.

ვიტყვით, რომ მარტინგალი $f = \left(f^{(k)}, k \in \mathbb{N}\right)$ არის L_p-შემოსაზღვრული ($0 < p \leq \infty$) თუ თითოეული $f^{(k)}$ ფუნქციისთვის $f^{(k)} \in L_p(G)$ და

$$\|f\|_p := \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\|f^{(k)}\right\|_p < \infty.$$

თუ $f \in L_1(G)$, მაშინ $F = (S_{2^k}f, k \in \mathbb{N})$ მიმდევრობა არის მარტინგალი და მათ რეგულარული მარტინგალები ეწოდებათ.

თუ $1 \leq p < \infty$ და $f \in L_p(G)$, მაშინ $f = \left(f^{(k)}, k \in \mathbb{N}\right)$ არის L_p-შემოსაზღვრული და

$$\lim_{k\to\infty} \|S_{2^k}f - f\|_p = 0.$$

შესაბამისად (იხ. [58])

$$\|F\|_p = \|f\|_p.$$

ლიტერატურაში ასევე ცნობილია (იხ. წიგნები [58] და [69]), რომ თუ $1 < p \leq \infty$, მაშინ ნებისმიერი L_p-შემოსაზღვრული $f = \left(f^{(k)}, n \in \mathbb{N}\right)$ მარტინგალისთვის არსებობს $f \in L_p(G)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც

$$f^{(k)} = S_{2^k}f.$$

თუ $p = 1$, მაშინ არსებობს ასეთივე $f \in L_1(G)$ ფუნქცია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ სრულდება თანაბრად ინტეგრებადობის პირობა (იხ. [58])

$$\lim_{y\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{\{|f_k|>y\}} |f_k(x)|\, d\mu(x) = 0.$$

ამრიგად, ასახვა

$$f \to f := (S_{2^k}f,\ k \in \mathbb{N})$$

არის იზომეტრიული $L_p(G)$ სივრციდან $L_p(G)$-შემოსაზღვრული მარტინგალების სივრცეში, როცა $1 < p \leq \infty$ და შეგვიძლია ეს სივრცეები ერთმანეთისგან არ განვასხვავოთ.

ანალოგიურად, $L_1(G)$ სივრცე გაიგივდება თანაბრად ინტეგრებად მარტინგალების სივრცესთან.

ვიტყვით, რომ მარტინგალი $f = \left(f^{(k)}, k \in \mathbb{N}\right)$ არის სუსტად L_p-შემოსაზღვრული ($0 < p \leq \infty$) თუ $f^{(k)} \in L_{p,\infty}$ და

$$\|f\|_{L_{p,\infty}} := \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\|f^{(k)}\right\|_{L_{p,\infty}} < \infty.$$

განვმარტოთ $f = \left(f^{(k)}, n \in \mathbb{N}\right)$ მარტინგალის მაქსიმალური ფუნქცია

$$f^* := \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|f^{(k)}\right|.$$

თუ $g \in L_1(G)$, მაშინ ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ფუნქცია მოიცემა შემდეგნაირად

$$g^{*}(x):=\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{|I_k(x)|}\left|\int_{I_k(x)}g(t)\,d\mu(t)\right|.$$

$0<p<\infty$-სთვის, ჰარდის მარტინგალური სივრცე $H_p(G)$ მოიცავს ისეთ მარტინგალებს, რომელთათვისაც

$$\|f\|_{H_p}:=\|f^{*}\|_p<\infty.$$

$f=\left(f^{(k)}:n\in\mathbb{N}\right)$ მარტინგალის უოლშ-ფურიეს კოეფიციენტი განიმარტება განსხვავებულად:

$$\widehat{f}(n):=\lim_{k\to\infty}\int_G f^{(k)}w_n d\mu.$$

როგორც ცნობილია (იხ. [69]), თუ $f=\left(f^{(k)},\ k\in\mathbb{N}\right)$ არის რეგულარული მარტინგალი, რომელიც წარმოქმნილია ინტეგრებადი $f_0\in L_1(G)$ ფუნქციით, მაშინ f მარტინგალის ფურიეს კოეფიციენტები ემთხვევა f_0 ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს, ყოველი $n\in\mathbb{N}$-თვის.

ზომად, შემოსაზღვრულ a ფუნქციას ეწოდება p-ატომი, თუ არსებობს ისეთი J ინტერვალი, რომ სრულდება შემდეგი სამი პირობა

a-ს სუპორტი არის J ინტერვალში

$$\operatorname{supp}(a)\subset J,$$

ინტეგრალი a ფუნქციიდან ნულის ტოლია

$$\int_J a\,d\mu=0$$

და a არის თითქმის ყველგან შემოსაზღვრული ფუნქცია და ზემოდან ფასდება შემდეგი გამოსახულებით

$$\|a\|_{\infty}\le\mu(J)^{-1/p}.$$

p-ატომების კონკრეტული, მნიშვნელოვანი კონსტრუქციები განხილულია სადოქტორო ნაშრომში გამოყენებულ შემდეგ შრომებში [12, 13].

მაგალითი 1.3. *განვიხილოთ p-ატომების შემდეგი მიმდევრობა*

$$f_{m_k}=D_{2^{m_k+1}}-D_{2^{m_k}},\qquad m_k\ge 3. \tag{1.5.1}$$

მაშინ მისი ფურიეს კოეფიციენტებისთვის გვაქვს

$$\widehat{f}_{m_k}(i)=\begin{cases}1, & \text{როცა } i=2^{m_k},\cdots,2^{m_k+1}-1,\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

ხოლო ამ p-ატომების კერძო ჯამები გამოითვლება შემდეგნაირად

$$S_if_{m_k}=\begin{cases} D_i-D_{2^{m_k}}=w_{2^{m_k}}D_{i-2^{m_k}}, \text{ როცა } i=2^{m_k},\cdots,2^{m_k+1}-1,\\ f_{m_k}, \text{ როცა } i\geq 2^{m_k+1},\\ 0, \qquad \text{სხვაგან}.\end{cases} \tag{1.5.2}$$

უფრო მეტიც, ადგილი აქვს მათი ნორმების შემდეგ შეფასებებს

$$\|f_{m_k}\|_{H_p}\leq 2^{m_k(1-1/p)}. \tag{1.5.3}$$

შევნიშნოთ, რომ $0<p\leq 1$-თვის, ჰარდის მარტინგალური $H_p\left(G\right)$ სივრცეებისთვის გვაქვს ატომებად დაშლის (წარმოდგენის) თეორემა, რომელიც დამტკიცებულია ვეისის მიერ [102, 106]:

ლემა 1.4. *ვთქვათ $0<p\leq 1$. მაშინ $f=\left(f^{(k)},k\in\mathbb{N}\right)$ მარტინგალი ეკუთვნის $H_p\left(G\right)$ სივრცეს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ არსებობს p-ატომის $\left(a_k,k\in\mathbb{N}\right)$ მიმდევრობა და ნამდვილი რიცხვების $\left(\lambda_k,k\in\mathbb{N}\right)$ მიმდევრობა ისეთი, რომ ყოველი $n\in\mathbb{N}$-სთვის ადგილი აქვს წარმოდგენას*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_kS_{2^n}a_k=f^{(n)}, \quad \text{თ.ყ.}, \tag{1.5.4}$$

სადაც

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\lambda_k\right|^p<\infty.$$

უფრო მეტიც,

$$\|f\|_{H_p}\backsim\inf\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left|\lambda_j\right|^p\right)^{1/p},$$

სადაც ინფიმუმი აღებულია $f=\left(f^{(k)},k\in\mathbb{N}\right)$ მარტინგალის (1.5.4) სახის (ყველა) წარმოდგენებს შორის.

$H_p(G)$ მარტინგალების საინტერესო და ამ თეორიისთვის მეტად მნიშვნელოვანი კონსტრუქციები რომლებსაც დიდი გამოყენებები გააჩნია, შეგვიძლია ვნახოთ შემდეგ შრომებში: [18], [68], [83], [89].

ვიტყვით, რომ სუბწრფივი ოპერატორი U არის (H_p,H_p) ტიპის, თუ ის შემოსაზღვრულია $H_p(G)$-დან $H_p(G)$-ში, ანუ არსებობს მუდმივი C_p, ისეთი, რომ

$$\|Uf\|_{H_p}<C_p\|f\|_{H_p}.$$

ვიტყვით, რომ სუბწრფივი ოპერატორი U არის ძლიერი (H_p,L_p) ტიპის (ან უბრალოდ (H_p,L_p) ტიპის), თუ ის შემოსაზღვრულია $H_p(G)$-დან $L_p(G)$-ში

$$\|Uf\|_p<C_p\|f\|_{H_p}.$$

ვიტყვით, რომ სუბწრფივი ოპერატორი U არის სუსტი (H_p,L_p) ტიპის, თუ ის შემოსაზღვრულია

$H_p(G)$-დან $L_{p,\infty}(G)$-ში

$$\|Uf\|_{L_{p,\infty}(G)} < C_p \|f\|_{H_p}.$$

ლემა 1.4-ის გამოყენებით მტკიცდება საკმარისი პირობები, იმისთვის რომ სუბწრფივ ოპერატორს ჰქონდეს (H_p, L_p) ან სუსტი (H_p, L_p) ტიპები (იხ. ვეისი [103]):

ლემა 1.5. *დავუშვათ, რომ U ოპერატორი არის სუბწრფივი და $0 < p_0 \leq 1$-სთვის სრულდება*

$$\int_{\overline{J}} |Ua|^{p_0} \, d\mu \leq c_p < \infty,$$

ყოველი p_0-ატომისთვის a, სადაც J აღნიშნავს ატომის სუპორტს და $\overline{J} = G \setminus J$.

თუ T ოპერატორი არის შემოსაზღვრული $L_{p_1}(G)$-დან $L_{p_1}(G)$-ში, სადაც $1 < p_1 \leq \infty$, მაშინ U ოპერატორი არის (H_{p_0}, L_{p_0}) ტიპის, რაც ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\|Uf\|_{p_0} \leq C_{p_0} \|f\|_{H_{p_0}}. \tag{1.5.5}$$

უფრო მეტიც, თუ $p_0 < 1$, მაშინ ყოველი $f \in L_1(G)$-თვის გვაქვს სუსტი $(1,1)$ ტიპის უტოლობა

$$y\mu\left\{t \in G : \ |Uf(t)| > y\right\} \leq C \|f\|_1, \quad (\forall\, y > 0).$$

ანალოგიურად შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა:

ლემა 1.6. *დავუშვათ, რომ U ოპერატორი არის სუბწრფივი და $0 < p_0 \leq 1$-სთვის სრულდება*

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^{p_0} \mu\left\{t \in \overline{J} : |Uf(t)| > \lambda\right\} \leq c_{p_0} < \infty$$

ყოველი p_0-ატომისთვის a, სადაც J ნიშნავს ატომის სუპორტს და $\overline{J} = G \setminus J$.

თუ U ოპერატორი არის შემოსაზღვრული $L_{p_1}(G)$-დან $L_{p_1}(G)$-ში, სადაც $1 < p_1 \leq \infty$, მაშინ U ოპერატორი არის სუსტი (H_{p_0}, L_{p_0}) ტიპის, რაც ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\|Uf\|_{L_{p_0,\infty}} \leq C_{p_0} \|f\|_{H_{p_0}}.$$

უფრო მეტიც, თუ $p_0 < 1$, მაშინ

$$y\mu\left\{x \in G : \ |Uf(t)| > y\right\} \leq C \|f\|_1, \quad (\forall\, y > 0).$$

ყოველი $f \in L_1(G)$-თვის.

ვთქვათ $p > 0$. ჰარდის მარტინგალურ $H_p(G)$ სივრცეში უწყვეტობის მოდული განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\omega_{H_p}\left(\frac{1}{2^k}, f\right) := \|f - S_{2^k} f\|_{H_p}.$$

თუ $p \geq 1$ და $n \in \mathbb{N}$, მაშინ არსებობს შემდეგი კავშირი

$$\omega_p\left(1/2^k, f\right) \quad \text{და} \quad \|f - S_{2^k} f\|_p$$

გამოსახულებებს შორის (იხ. [69]). კერძოდ,

$$\frac{1}{2}\omega_p\left(1/2^k, f\right) \leq \|f - S_{2^k} f\|_p \leq \omega_p\left(1/2^k, f\right). \tag{1.5.6}$$

შემდეგი ლემა პასუხს სცემს რა ხდება $p > 1$-თვის, რომლის დამტკიცებაც შეგვიძლია ვნახოთ [58]-ში (იხ. ასევე [106]).

ლემა 1.7. *ვთქვათ* $p > 1$. *მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ექვივალენტობებს*

$$H_p(G) \sim L_p(G)$$

და

$$\omega_{H_p}\left(\frac{1}{2^n}, f\right) \sim \omega_p\left(\frac{1}{2^n}, f\right).$$

2 ჰარდის მარტინგალური სივრცეები და უოლშ-ფურიეს მწკრივე-ბის კერძო ჯამები

2.1 ზოგიერთი კლასიკური შედეგი უოლშ-ფურიეს მწკრივების კერძო ჯამებისთვის

რიმან-ლებეგის ლემის (იხ. წიგნი [71]) თანახმად, ნებისმიერი $f \in L_1(G)$-სთვის

$$\widehat{f}(k) \to 0, \quad \text{როცა} \;\; k \to \infty.$$

ცნობილია, რომ (იხ. [3] და [71]) თუ $f \in L_1(G)$ და უოლშის მწკრივი

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w_k \tag{2.1.1}$$

კრებადია f ფუნქციისკენ $L_1(G)$ ნორმით, მაშინ

$$c_k = \int_G f w_k d\mu := \widehat{f}(k),$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ (2.1.1) მწკრივი, რომელიც f-ის აპროქსიმაციას ახდენს, აუცილებლად უოლშის-ფურიეს მწკრივია. ასეთივე თეორემაა სამართლიანი, თუ $L_1(G)$ ნორმით კრებადობას შევცვლით თანაბრად კრებადობით.

ერთგანზომილებიანი და ორგანზომილებიანი ტრიგონომეტრიული და უოლშის ორთოგონალური სისტემების კერძო ჯამების $L_1(G)$ ნორმით, ზომით, თანაბრად და წერტილოვნად კრებადობის და აპროქსიმაციის საკითხები შესწავლილია ანტონოვის [2], ბარამიძის [17, 19], ბლაჰოტას [20], გოგინავას [41], გატის, გოგინავას და ტყებუჩავას [37], შნაიდერის [72, 73], შოლინის [77], ონევირის [59], ონევერის და ვატერმანის [60], გულისევის [47] და ზიგმუნდის [111] მიერ.

უოლშ-ფურიეს მწკრივების კერძო ჯამების თითქმის ყველგან კრებადობის საკითხები შესავლილია [64]-ში, ხოლო მისი განშლადობის საკითხები განხილულია ფეიერის [31], კაზელსონის [48], ლებეგის [50], სტეჩკინის [79], იუნგის [109] და ჟიჟიაშვლილის [110] მიერ.

სრული ორთოგონალური სისტემების მიმართ ფურიეს მწკრივების სხვადასხვა მეთოდით კრებადობის და განშლადობის საკითხები შესწავლილია ბოჩკარიოვის [27], გოგოლაძისა და ცაგარეიშვილის [44, 45], კაშინის და სააკიანის [49], ონიანის [61], თუთბერიძის და ცაგარეიშვილის [95] და უგულავას [28–30] მიერ.

მას შემდეგ, რაც $H_1 \subset L_1$, რიმან-ლებეგის თეორემიდან ასევე მივიღებთ, რომ ნებისმიერი $f \in H_1(G)$ მარტინგალის (ფუნქციის) უოლშ-ფურიეს k-ური კოეფიციენტები მიისწრაფვის ნულისკენ, როცა $k \to \infty$.

როცა $p > 1$, ცნობილია, (იხ. წიგნები [46] და [71]) რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა

$$\|S_n f\|_p \leq C_p \|f\|_p, \;\; \text{ნებისმიერი} \;\; f \in L_p(G) \;\; \text{ფუნქციისთვის},$$

სამართლიანია უფრო ძლიერი შედეგიც (იხ. წიგნი [71]). კერძოდ, კერძო ჯამების S^* მაქსიმალურ ოპერატორს აქვს სუსტი (p,p) ტიპი, სადაც $p>1$.

$p=1$-თვის ვატარიმ [100] (იხ. [108]) დაამტკიცა, რომ ყოველი $k\in\mathbb{N}_+$-სთვის და ნებისმიერი $f\in L_1(G)$ ფუნქციისთვის,

$$y\mu\left(|S_kf|>y\right)\leq C\left\|f\right\|_1, \quad (\forall\, y>0).$$

ცნობილია, (იხ. [3] და [71]) რომ უოლშის ორთოგონალური სისტემა არ ქმნის შაუდერის ბაზისს ინტეგრებად ფუნქციათა ლებეგის $L_1(G)$ სივრცეში. მეტიც, არსებობს $f\in H_1(G)$ მარტინგალი, ისეთი, რომ მისი კერძო ჯამები არ არიან შემოსაზღვრული $L_1(G)$-ში.

$L(n)=\|D_k\|_1$ ლებეგის კონსტანტების გამოყენებით ადვილად მიიღება (დეტალებისთვის იხ. [26] და [71]), რომ ინტეგრებადი ფუნქციის უოლშ-ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების $S_{m_k}f$ ქვემიმდევრობა კრებადია f ფუნქციისკენ L_1 ნორმით, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}L(m_k)\leq C<\infty. \tag{2.1.2}$$

იმის გათვალისწინებით, რომ ლებეგის კონსტანტების შეფასება უოლშის სისტემის მიმართ ხდება

$$n=\sum_{j=0}^{\infty}n_j2^j,(n_j\in Z_2)$$

ნატურალური რიცხვის ვარიაციის საშუალებით

$$V\left(n\right)=n_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left|n_k-n_{k-1}\right|$$

და სამართლიანია შემდეგი ორმხრივი უტოლობა (იხ. [71])

$$\frac{1}{8}V\left(n\right)\leq L(n)\leq V\left(n\right). \tag{2.1.3}$$

ცნობილია (იხ. წიგნები [71] და [102]), რომ ნებისმიერი $p>0$-თვის და $f\in H_p(G)$-თვის

$$\left\|S_{2^k}f-f\right\|_{H_p}\to 0, \quad \text{როცა} \quad k\to\infty, \tag{2.1.4}$$

მეორე მხრივ, (იხ. [87]) როცა $0<p<1$ მოიძებნება მარტინგალი $f\in H_p(G)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|S_{2^k+1}f\right\|_{L_{p,\infty}}=\infty. \tag{2.1.5}$$

S_{2^k+1} ქვემიმდევრობის განშლადობას იწვევს ის ფაქტი (იხ. [88]), რომ ფურიეს კოეფიციენტები არ არიან ერთობლივ შემოსაზღვრულნი $H_p(G)$ სივრეში, როცა $0<p<1$.

უოლშ-ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების ძლიერად შეჯამებადობის საკითხები შესწავლილია წიგნში [69] (იხ. აგრეთვე [97,98]). ტრიგონომეტრიული სისტემისთვის მსგავსი შედეგი დამტკიცებულია შმიტის [78] მიერ, ხოლო ვილინკინის (როგორც შემოსაზღვრული, ასევე შემოუსაზღვრელი ვილინკი-

ნის სიტემებისთვის) სისტემებისთვის გატის [35] სტატიაში, ორგანზომილებიან შემთხვევაში კი მემიჩის, შიმონის და ტეფნაძის [51] მიერ.

როცა $0<p<1,$ მაშინ [92]-ში (იხილეთ ასევე [69], [90] და [91]) დამტკიცდა, რომ თუ $f\in H_p(G)$, მაშინ არსებობს მუდმივი C_p, ისეთი, რომ

$$\left\|S_{m_k}f\right\|_{H_p}\leq C_p\left\|f\right\|_{H_p},$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\rho\left(m_k\right)<c<\infty, \tag{2.1.6}$$

სადაც

$$\rho\left(m_k\right):=\left|m_k\right|-\left\langle m_k\right\rangle.$$

კერძოდ, ამ თეორემიდან მაშინვე ვღებულობთ, რომ ნებისმიერი $p>0$-თვის, $f\in H_p(G)$ მარტინგალისთვის და $k\in\mathbb{N}$-თვის

$$\left\|S_{2^k+2^{k-1}}f\right\|_{H_p}\leq C_p\left\|f\right\|_{H_p}.$$

მეორე მხრივ, ნებისმიერი $p>0$-თვის, მოიძებნება მარტინგალი $f\in H_p(G)$, ისეთი, რომ ადგილი აქვს (2.1.5)-ს.

ტეფნაძემ [92]-ში (იხ. ასევე [69] და [91]) დაამტკიცა, რომ ყოველი $0<p<1$-თვის და $f\in H_p(G)$ მარტინგალისთვის სამართლიანია უტოლობა

$$\left\|S_nf\right\|_{H_p}\leq c_p2^{\rho(n)(1/p-1)}\left\|f\right\|_{H_p}. \tag{2.1.7}$$

მეორე მხრივ, თუ $0<p<1$, $\{m_k:\ k\geq 0\}$ წარმოადგენს ნატურალურ რიცხვთა ისეთ ზრდად მიმდევრობას, რომლისთვისაც სრულდება

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\rho\left(m_k\right)=\infty \tag{2.1.8}$$

და $\{\varphi_n\}$ არის არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{2^{\rho(m_k)(1/p-1)}}{\varphi_{m_k}}=\infty,$$

მაშინ მოიძებნება მარტინგალი $f\in H_p(G)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|\frac{S_{m_k}f}{\varphi_{m_k}}\right\|_{L_{p,\infty}}=\infty.$$

[92]-ში ტეფნაძემ ასევე განიხილა $p=1$ შემთხვევა და დაამტკიცა, რომ თუ $n\in\mathbb{N}_+$ და $f\in H_1(G)$, მაშინ

$$\|S_n f\|_{H_1} \leq V(n) \|f\|_{H_1}. \tag{2.1.9}$$

უფრო მეტიც, თუ $\{m_k: \ k \geq 0\}$ წარმოადგენს დადებითი რიცხვების ზრდად მიმდევრობას, რომლისთვისაც სრულდება

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} V(m_k) = \infty$$

და $\{\varphi_n\}$ წარმოადგენს არაუარყოფით, არაკლებად მიმდევრობას, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{V(m_k)}{\varphi_{m_k}} = \infty,$$

მაშინ მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_1(G)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \frac{S_{m_k} f}{\varphi_{m_k}} \right\|_1 = \infty.$$

$0 < p < 1$-თვის ბლაჰოტამ, ნოჯიმ, პერსონმა და ტეფნაძემ [21]-ში დაამტკიცეს, რომ თუ $0 < p < 1$ და $f \in H_p(G)$, მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |S_{m_k} f|$$

არის ძლიერი (H_p, L_p) ტიპის, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც შესრულებულია (2.1.6) პირობა. კერძოდ, აქედან ვღებულობთ, რომ თუ $p > 0$, მაშინ შეზღუდული მაქსიმალური ოპერატორები

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |S_{2^k} f|, \qquad \sup_{k\in\mathbb{N}} |S_{2^k+2^{k-1}} f|$$

არიან (H_p, L_p) ტიპის. მეორეს მხრივ, ყოველი $p > 0$-თვის

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_{2^k+1} f|$$

მაქსიმალურ ოპერატორს არ აქვს (H_p, L_p) ტიპი.

ზემოთ მოყვანილი (2.1.6) პირობა საკმარისია $p = 1$ -თვისაც, მაგრამ არა აუცილებელი. დღემდე ღია პრობლემას წარმოადგენს ასეთი აუცილებელი და საკმარისი პირობების დადგენა.

[88]-ში (იხ. აგრეთვე [69]) ტეფნაძემ დაამტკიცა, რომ თუ $0 < p \leq 1$, მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{S}_p^* f := \sup_{k\in\mathbb{N}_+} \frac{|S_k f|}{(k+1)^{1/p-1} \log^{[p]}(k+1)}, \quad (0 < p \leq 1)$$

სადაც $[p]$-ით არის აღნიშნული p ნამდვილი რიცხვის მთელი ნაწილი, არის ძლიერი (H_p, L_p) ტიპის. მეტიც, ნებისმიერი არაუარყოფითი, არაკლებადი $\{\varphi_k\}$ მიმდევრობისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{(k+1)^{1/p-1}\log^{[p]}(k+1)}{\varphi_k}=\infty,$$

მოიძებნება მარტინგალი $f\in H_p(G)$ $(0<p\leq 1)$, ისეთი, რომ სამართლიანია

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|\frac{S_kf}{\varphi_k}\right\|_p=\infty.$$

ზემოთ მოყვანილი უარყოფითი შედეგიდან ჩვენ დავასკვნით, რომ მოიძებნება მარტინგალი $f\in H_p(G)$, $(0<p\leq 1)$, ისეთი, რომ სამართლიანია

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\|S_kf\|_p=\infty,$$

ხოლო შემოსაზღვრულობის თეორემიდან მივიღებთ, რომ თუ $0<p\leq 1$, მაშინ

$$\|S_kf\|_p\leq c_p(k+1)^{1/p-1}\log^{[p]}(k+1)\,\|f\|_{H_p},\ \text{ როცა }\ 0<p\leq 1,$$

სადაც $[p]$-თი არის აღნიშნული p ნამდვილი რიცხვის მთელი ნაწილი.

[87]-ში ამ უტოლობის გამოყენებით ტეფნაძემ დაადგინა ისეთი აუცილებელი და საკმარისი პირობები $f\in H_p(G)$ მარტინგალის უწყვეტობის მოდულებისთვის, რომლებიც უზრუნველყოფენ უოლშ-ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების კრებადობას $H_p(G)$ ნორმით. კერძოდ თუ ვთქვათ $0<p\leq 1$, $[p]$-ით არის აღნიშნული p ნამდვილი რიცხვის მთელი ნაწილი, $f\in H_p(G)$ და

$$\omega_{H_p}\left(\frac{1}{2^k},f\right)=o\left(\frac{1}{2^{k(1/p-1)}k^{[p]}}\right),\ \text{ როცა }\ k\to\infty.$$

მაშინ

$$\|S_kf-f\|_p\to 0,\ \text{როცა}\ \ k\to\infty.$$

უფრო მეტიც, მოიძებნება მარტინგალი $f\in H_p(G)$, სადაც $0<p<1$, რომლისთვისაც

$$\omega_{H_p}\left(\frac{1}{2^k},f\right)=O\left(\frac{1}{2^{k(1/p-1)}k^{[p]}}\right),\ \ \text{როცა}\ \ k\to\infty$$

და

$$\|S_nf-f\|_{L_{p,\infty}}\nrightarrow 0,\ \text{როცა}\ n\to\infty.$$

(2.1.7) და (2.1.9) უტოლობების გამოყენებით ტეფნაძემ [91]-ში და [92]-ში (იხ. აგრეთვე [69]) დაამტკიცა, რომ თუ $2^k<n\leq 2^{k+1}$, მაშინ არსებობს მუდმივი c_p, ისეთი, რომ

$$\|S_nf-f\|_{H_p}\leq c_p2^{\rho(n)(1/p-1)}\omega_{H_p}\left(\frac{1}{2^k},f\right),\quad (0<p<1)\tag{2.1.10}$$

და

$$\|S_n f - f\|_{H_1} \leq c_1 V(n)\, \omega_{H_1}\left(\frac{1}{2^k}, f\right). \qquad (2.1.11)$$

უტოლობა (2.1.10)-ის გამოყენებით [91]-ში და [92]-ში ტეფნაძემ დაამტკიცა, რომ თუ $0 < p < 1$, $f \in H_p(G)$ და $\{m_k : k \geq 0\}$ არაუარყოფითი რიცხვების მიმდევრობაა, ისეთი, რომ

$$\omega_{H_p}\left(\frac{1}{2^{|m_k|}}, f\right) = o\left(\frac{1}{2^{\rho(m_k)(1/p-1)}}\right), \text{ როცა } k \to \infty,$$

მაშინ

$$\|S_{m_k} f - f\|_{H_p} \to 0, \text{ როცა } k \to \infty. \qquad (2.1.12)$$

მეორე მხრივ, თუ $\{m_k : k \geq 0\}$ წარმოადგენს ნატურალური რიცხვების ზრდად მიმდევრობას, რომელიც აკმაყოფილებს (2.1.8) პირობას, მაშინ მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_p(G)$ და ქვემიმდევრობა

$$\{\alpha_k,\ k \geq 0\} \subset \{m_k,\ k \geq 0\},$$

რომლისთვისაც

$$\omega_{H_p}\left(\frac{1}{2^{|\alpha_k|}}, f\right) = O\left(\frac{1}{2^{\rho(\alpha_k)(1/p-1)}}\right) \text{ როცა } k \to \infty$$

და

$$\limsup_{k\to\infty} \|S_{\alpha_k} f - f\|_{L_{p,\infty}} > c_p > 0 \text{ როცა } k \to \infty, \qquad (2.1.13)$$

სადაც c_p მუდმივია, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე.

უტოლობა (2.1.11)-ის გამოყენებით [91]-ში და [92]-ში დამტკიცდა, რომ თუ $f \in H_1(G)$ და $\{m_k,\ k \geq 0\}$ წარმოადგენს დადებითი რიცხვების ზრდად მიმდევრობას, ისეთი რომ

$$\omega_{H_1}\left(\frac{1}{2^{|m_k|}}, f\right) = o\left(\frac{1}{V(m_k)}\right), \text{ როცა } k \to \infty. \qquad (2.1.14)$$

მაშინ

$$\|S_{m_k} f - f\|_{H_1} \to 0, \text{ როცა } k \to \infty.$$

უფრო მეტიც, (2.1.14) პირობა არის განუზოგადებელი იგივე აზრით, როგორც ეს მოყვანილია $0 < p < 1$-თვის.

ამ თავში კერძო ჯამების შესახებ განხილული პრობლემატიკა რომელიც ეხება ჰარდის მარტინგალურ შემთხვევაში უოლშის სისტემისთვის დაწვრილებითაა შესწავლილი ტეფნაძის [83] მონოგრაფიაში, ხოლო უფრო ზოგად შემთხვევაში, ვილინკინის ორთოგონალური სისტემისთვის, ეს შედეგები დამტკიცებულია პერსონის, ტეფნაძის და ვეისის [69] წიგნში, რომელიც 600 გვერდზე მეტია და ამ მიმართულებით ყველა მნიშვნელოვან და საინტერესო შედეგს შეიცავს. მიუხედავად ამისა, დარჩენილია უამრავი საინტერესო პრობლემა, რომლებიც ამ წიგნის ყოველი თავის ბოლოსაცაა დასმული ღია პრობ-

ლემების სახით.

კვლევები, რომლებიც ამ თეზისშია გადმოცემული ნაწილობრივ ამ პრობლემების გადაჭრას ეძღვნება უოლშ-ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების შემთხვევაში. აქ დაწვრილებით ჩამოვაყალიბებთ მიღებულ შედეგებს, რომლებსაც გაშლილი სახით მომდევნო თავში განვიხილავთ და დაწვრილებითაც დავამტკიცებთ.

როცა $0 < p < 1$-თვის ამ თეზისში (იხ. აგრეთვე ბარამიძე, პერსონი, ტეფნაძე [13]) ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_k f|}{2^{\rho(k)(1/p-1)}} \tag{2.1.15}$$

შემოსაზღვრულია მარტინგალური ჰარდის $H_p(G)$ სივრციდან $L_{p,\infty}(G)$ სივრცეში, მაგრამ არაა შემოსაზღვრული $H_p(G)$ სივრციდან $L_p(G)$ სივრცეში.

მეორეს მხრივ, ამ თეზისში (იხ. აგრეთვე ბარამიძე, პერსონი, ტეფნაძე [6] და ბარამიძე [13]) ჩვენ ასევე დავამტკიცებთ, რომ თუ $0 < p < 1$, $\{\alpha_k,\ \ k \geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \rho\left(\alpha_k\right) = \infty$$

და $\{\varphi_k\}$ არის არაკლებადი და არაუარყოფითი მიმდევრობა, რომლისთვისაც სრულდება პირობა

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{2^{\rho(\alpha_k)(1/p-1)}}{\varphi_{\alpha_k}} = \infty, \tag{2.1.16}$$

მაშინ მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_p(G)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \frac{S_{\alpha_k} f}{\varphi_{\alpha_k}} \right\|_{L_{p,\infty}} = \infty.$$

ამ თეზისში (იხ. აგრეთვე ბარამიძე, პერსონი, საითჰი, ტეფნაძე [12]), ასევე დავამტკიცებთ, რომ თუ $0 < p < 1$, $f \in H_p\left(G\right)$ და $\{\varphi_n\}$ არის ნებისმიერი არაუარყოფითი და არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n^p} < c < \infty,$$

მაშინ, წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{S}^{*,\nabla}$, რომელიც განიმარტება ტოლობით

$$\widetilde{S}^{*,\nabla} f = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_k f|}{2^{\rho(k)(1/p-1)}\varphi_{\rho(k)}}, \tag{2.1.17}$$

არის ძლიერი (H_p, L_p) ტიპის.

უფრო მეტიც, ამ თეზისში (იხ. აგრეთვე ბარამიძე, პერსონი, საითჰი, ტეფნაძე [12] და ბარამიძე [6]) ასვე ნაჩვენები იქნება, რომ თუ $0 < p < 1$ და $\{\varphi_n\}$ არის ნებისმიერი არაკლებადი, არაუარყოფითი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi_n^p}=\infty, \tag{2.1.18}$$

მაშინ მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_p(G)$, ისეთი, რომ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{S}^{*,\nabla}$, რომელიც განმარტებულია (2.1.17) ტოლობით, არ არის ძლიერი (H_p, L_p) ტიპის.

აქედან, კერძოდ მივიღებთ რომ, თუ $0<p<1$ და $f \in H_p(G)$, მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{S}^{*,\nabla,\varepsilon}$, რომელიც განმარტებულია შემდეგნაირად

$$\widetilde{S}^{*,\nabla,\varepsilon}f := \sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{|S_kf|}{2^{\rho(k)(1/p-1)}\left(\rho(k)\log^{1+\varepsilon}\rho(k)\right)^{1/p}}, \quad \varepsilon \ge 0,$$

შემოსაზღვრულია მარტინგალური ჰარდის $H_p(G)$ სივრციდან ლებეგის $L_p(G)$ სივრცეში, როცა $\varepsilon>0$ და არაა შემოსაზღვრული $H_p(G)$ სივრციდან ლებეგის $L_p(G)$ სივრცეში, როცა $\varepsilon=0$.

ამ სადოქტორო თეზისში (იხ. ასევე ბარამიძე [5]) ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ თუ $0<p<1$, $f\in H_p$, $\{m_k,\ k\ge 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა და

$$\{m_{s_i},\ 1\le i\le r\}\subset\{m_k,\ k\ge 0\}$$

არის ისეთი ქვემიმდევრობები, რომლებისთვისაც სრულდება

$$2^s\le m_{s_1}\le m_{s_2}\le\cdots\le m_{s_r}\le 2^{s+1},\ s\in\mathbb{N},$$

მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{S}^{*,\nabla}$, რომელიც განმარტებულია შემდეგნაირად

$$\widetilde{S}^{*,\nabla}f := \sup_{s\in\mathbb{N}}\sup_{2^s\le m_{s_i}<2^{s+1}}\frac{\left|S_{m_{s_i}}f\right|}{2^{\rho_s\left(m_{s_i}\right)(1/p-1)}},$$

სადაც $\rho_s\left(m_{s_i}\right)$ განიმარტება (1.2.1) ტოლობით, არის ძლიერი (H_p, L_p) ტიპის.

უფრო მეტიც, ამ თეზისში (იხ. აგრეთვე ბარამიძე [5] და ბარამიძე [6]), ასევე დავამტკიცებთ, რომ თუ $0<p<1$, $\{m_k,\ k\ge 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა და

$$\{m_{s_i},\ 1\le i\le r\}\subset\{m_k,\ k\ge 0\}$$

არის ისეთი ქვემიმდევრობა, რომლებისთვისაც სრულდება

$$2^s\le m_{s_1}\le m_{s_2}\le\cdots\le m_{s_r}\le 2^{s+1},\ s\in\mathbb{N},$$

მაშინ, ნებისმიერი არაკლებადი, არაუარყოფითი $\{\varphi_k\}$ მიმდევრობისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\sup_{s\in\mathbb{N}}\sup_{2^s\le m_{s_i}<2^{s+1}}\frac{2^{\rho_s\left(m_{s_i}\right)(1/p-1)}}{\varphi_{m_{s_i}}}=\infty, \tag{2.1.19}$$

მაშინ, მოიძებნება მარტინგალი $f\in H_p(G)$, ისეთი, რომ მაქსიმალური ოპერატორი, რომელიც განიმარტება ტოლობით

$$\sup_{s\in\mathbb{N}}\sup_{2^s\leq m_{s_i}<2^{s+1}}\frac{\left|S_{m_{s_i}}f\right|}{\varphi\left(m_{s_i}\right)}, \qquad (2.1.20)$$

არ არის ძლიერი (H_p, L_p) ტიპის.

თუ $f\in H_1(G)$, ამ სადოქტორო თეზისში (იხ. ასევე ბარამიძე [4]) ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ რომ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{S}^{*,\nabla}$, რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად

$$\widetilde{S}^{*,\nabla}:=\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{|S_kf|}{V(k)}$$

არის ძლიერი (H_1, L_1) ტიპის, მაგრამ არ არის სუსტი (H_1, L_1) ტიპის.

2.2 უოლშ-ფურიეს მწკრივების კერძო ჯამების ქვემიმდევრობები და მათი მაქსიმალური ოპერატორები H_p სივრცეში

ამ თავში ჩვენ შევისწავლით უოლშ-ფურიეს მწკრივების კერძო ჯამების ქვემიმდევრობების წონიანი მაქსიმალური ოპერატორის შემოსაზღვრულობას მარტინგალური ჰარდის სივრცეებიდან $L_p(G)$ და $L_{p,\infty}(G)$ სივრცეებში.

შემდეგი თეორემები და შედეგები (იხ. თეორემა 2.1, თეორემა 2.2, შედეგი 2.3, შედეგი 2.4, შედეგი 2.5 და შედეგი 2.6) დამტიცებულია [12]-ში:

თეორემა 2.1. *ვთქვათ* $0<p<1$ *და* $f\in H_p(G)$. *მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი* $\widetilde{S}^{*,\nabla}$, *რომელიც განმარტებულია ტოლობით*

$$\widetilde{S}^{*,\nabla}f=\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{|S_nf|}{2^{\rho(n)(1/p-1)}}, \qquad (2.2.1)$$

შემოსაზღვრულია მარტინგალური ჰარდის $H_p(G)$ *სივრციდან* $L_{p,\infty}(G)$ *სივრცეში.*

დამტკიცება. მას შემდეგ რაც $\widetilde{S}^{*,\nabla}$ შემოსაზღვრულია L_∞-დან L_∞,-ში, ლემა 1.6-ის გამოყენებით მივიღებთ, რომ თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ

$$t^p\mu\left\{x\in\overline{I}:\widetilde{S}^{*,\nabla}a(x)\geq t\right\}\leq c_p<\infty, \qquad t\geq 0 \qquad (2.2.2)$$

სადაც a არის ნებისმიერი p-ატომი, რომელსაც აქვს სუპორტი I, რომლისთვისაც $\mu(I)=2^{-M}$. ზოგადობის შეუზღუდავად, ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხოთ, რომ a-ს სუპორტია $I=I_M$, სადაც $\mu(I)=2^{-M}$. ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$S_na(x)=0, \quad \text{სადაც} \quad n\leq 2^M,$$

ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $n>2^M$. თუ გავითვალისწინებთ შეფასებას

$$\|a\|_\infty\leq 2^{M/p}$$

მივიღებთ

$$\begin{aligned}\frac{|S_n a(x)|}{2^{\rho(n)(1/p-1)}} &\leq \frac{1}{2^{\rho(n)(1/p-1)}}\|a\|_\infty \int_{I_M} |D_n(x+t)|\,\mu(t)\\ &\leq \frac{1}{2^{\rho(n)(1/p-1)}}2^{M/p}\int_{I_M}|D_n(x+t)|\,\mu(t).\end{aligned}$$

ვთქვათ $x \in I_s \setminus I_{s+1}$, სადაც $0 \leq s < [n] \leq M$ ან $0 \leq s \leq M < [n]$. მაშინ, ცხადია, რომ $x + t \in I_s \setminus I_{s+1}$, სადაც $t \in I_M$. თუ გამოვიყენებთ (1.3.2) და (1.3.3) ტოლობებს მივიღებთ, რომ

$$D_n(x+t) = 0, \text{ სადაც } t \in I_M$$

და

$$\frac{|S_n a(x)|}{2^{\rho(n)(1/p-1)}} = 0. \tag{2.2.3}$$

ვთქვათ $I_s \setminus I_{s+1}$, $[n] \leq s \leq M$ ან $[n] \leq s \leq M$. მაშინ $x + t \in I_s \setminus I_{s+1}$ $t \in I_M$-თვის და თუ გამოვიყენებთ ლემა 1.1-ს მივიღებთ

$$\begin{aligned}\frac{|S_n a(x)|}{2^{\rho(n)(1/p-1)}} &\leq c_p 2^{M/p}\frac{2^{s-M}}{2^{\rho(n)(1/p-1)}} \qquad (2.2.4)\\ &\leq c_p \frac{2^{[n](1/p-1)+s+M(1/p-1)}}{2^{|n|(1/p-1)}}\\ &\leq c_p 2^{[n](1/p-1)+s} \leq c_p 2^s.\end{aligned}$$

(2.2.3)-ის და (2.2.4)-ის გათვალისწინებით, ნებისმიერი $x \in I_s \setminus I_{s+1}$, $0 \leq s < M$-თვის გვაქვს შემდეგი შეფასება

$$\widetilde{S}^{*,\nabla} a(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{|S_n a(x)|}{2^{\rho(n)(1/p-1)}}\right) \leq C_p 2^{s/p}. \tag{2.2.5}$$

აქედან პირდაპირ მივიღებთ, რომ როცა $s \leq M$ სამართლიანია შეფასება

$$\widetilde{S}^{*,\nabla} a(x) \leq C_p 2^{M/p} \quad \text{სადაც } x \in I_s \setminus I_{s+1}, \quad s = 0, 1, \cdots, M$$

საიდანაც

$$\mu\left\{x \in I_s \setminus I_{s+1} : \widetilde{S}^{*,\nabla} a(x) > C_p 2^{k/p}\right\} = 0, \quad k = M, M+1, \ldots \tag{2.2.6}$$

(1.1.1) იგივეობის და (2.2.5) შეფასების გამოყენებით მივიღებთ

$$\left\{x \in \overline{I_M} : \widetilde{S}^{*,\nabla} a(x) \geq C_p 2^{k/p}\right\} \subset \bigcup_{s=k}^{M-1}\left\{x \in I_s \setminus I_{s+1} : \widetilde{S}^{*,\nabla} a(x) \geq C_p 2^{k/p}\right\}$$

და

$$\mu\left\{x\in\overline{I_M}:\widetilde{S}^{*,\nabla}a\left(x\right)\geq C_p2^{k/p}\right\}\leq\sum_{s=k}^{M-1}\frac{1}{2^s}\leq\frac{2}{2^k}. \tag{2.2.7}$$

(2.2.6)-ის და (2.2.7)-ის გაერთიანებით დავასკვნით

$$2^k\mu\left\{x\in\overline{I_M}:\widetilde{S}^{*,\nabla}a\left(x\right)\geq C_p2^{k/p}\right\}<c_p<\infty,$$

საიდანაც მივიღეთ, რომ სამართლიანია (2.2.2) და თეორემა დამტკიცებულია. ■

ჩვენი შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ თეორემა 2.1 განუზოგადებელია შემდეგი აზრით:

თეორემა 2.2. *ა) ვთქვათ* $0<p<1$ *და* $\widetilde{S}^{*,\nabla}$ *არის განმარტებული* (2.2.1) *ტოლობით. მაშინ არსებობს* p*-ატომების* $\{f_n,n\in\mathbb{N}\}$ *მიმდევრობა, ისეთი, რომ*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{\left\|\widetilde{S}^{*,\nabla}f_n\right\|_p}{\left\|f_n\right\|_{H_p}}=\infty.$$

ბ) ვთქვათ $0<p<1$*. თუ* $\{\varphi_k\}$ *არის ნებიმიერი არაუარყოფითი და არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{2^{\rho(k)(1/p-1)}}{\varphi_k}=\infty, \tag{2.2.8}$$

მაშინ, არსებობს p*-ატომების* $\{f_n,n\in\mathbb{N}\}$ *მიმდევრობა, ისეთი, რომ*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{|S_kf_n|}{\varphi_k}\right\|_{L_{p,\infty}}}{\left\|f_n\right\|_{H_p}}=\infty.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ შემდეგი p-ატომების (1.5.1) მიმდევრობა, რომელიც მოცემულია მაგალით (1.3)-ში

$$f_{m_k}=D_{2^{m_k+1}}-D_{2^{m_k}},\qquad m_k\geq 3.$$

ვთქვათ $q_{m_k}^s\in\mathbb{N}$ არის ისეთი მიმდევრობა

$$2^{m_k}<q_{m_k}^s<2^{m_k+1},\quad \text{სადაც}\quad [q_{m_k}^s]=s,\quad s=0,\cdots,m_k-1.$$

(1.5.2)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\left|S_{q_{m_k}^s}f_{m_k}\left(x\right)\right|=\left|D_{q_{m_k}^s}\left(x\right)-D_{2^{m_k}}\left(x\right)\right|=\left|D_{q_{m_k}^s-2^{m_k}-1}\left(x\right)\right|$$

ვთქვათ $x \in I_{s+1}(e_s)$. თუ გამოვიყენებთ ლემა 1.2-ს მივიღებთ

$$\left|S_{q^s_{m_k}} f_{m_k}(x)\right| \geq c2^s, \tag{2.2.9}$$

საიდანაც

$$\frac{\left|S_{q^s_{m_k}} f_{m_k}(x)\right|}{2^{(1/p-1)\rho\left(q^s_{m_k}\right)}} \geq \frac{c2^{s/p}}{2^{m_k(1/p-1)}}.$$

აქედან,

$$\begin{aligned} & \int_G \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|S_n f_{m_k}(x)|}{2^{(1/p-1)\rho(n)}}\right)^p d\mu(x) \qquad (2.2.10) \\ \geq & \sum_{s=0}^{m_k-1} \int_{I_{s+1}(e_s)} \left(\frac{\left|S_{q_{m^s_k}} f_{m_k}(x)\right|}{2^{(1/p-1)\rho\left(q^s_{m_k}\right)}}\right)^p d\mu(x) \\ \geq & c_p \sum_{s=0}^{m_k-1} \frac{1}{2^s} \frac{2^s}{2^{m_k(1-p)}} \\ \geq & \frac{C_p}{2^{m_k(1-p)}} \sum_{s=1}^{m_k} 1 \\ \geq & \frac{C_p m_k}{2^{m_k(1-p)}}. \end{aligned}$$

საბოლოოდ, (1.5.3)-ის და (2.2.10)-ის გაერთიანებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\int_G \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\left|S_n f_{m_k}(x)\right|}{2^{(1/p-1)\rho(n)}}\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p}}{\|f_{m_k}\|_{H_p}} \\ \geq & \frac{\left(\frac{C_p m_k}{2^{m_k(1-p)}}\right)^{1/p}}{2^{m_k(1-1/p)}} \\ \geq & c_p m_k^{1/p} \to \infty, \quad \text{როცა} \quad k \to \infty, \end{aligned}$$

საიდანაც მივიღებთ ა) ნაწილის დამტკიცებას.

ბ) პირობა (2.2.8)-ის გათვალისწინებით, ჩვენ შეგვიძლია ავირჩიოთ ისეთი $q^{s_k}_{m_k} \in \mathbb{N}$ მიმდევრობა, სადაც $0 \leq s_k < m_k$ ისეთი, რომ

$$2^{m_k} < q^{s_k}_{m_k} < 2^{n_k+1}, \quad \text{სადაც} \quad [q_{m_k}] = s_k$$

და

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^{\rho(q^{s_k}_{m_k})(1/p-1)}}{\varphi_{q^{s_k}_{m_k}}} = \infty.$$

ვთქვათ $x \in I_{s_k+1}(e_{s_k})$. თუ გამოვიყენებთ (2.2.9)-ს მივიღებთ

$$\left|S_{q_{m_k}^{s_k}} f_{m_k}(x)\right| \geq c2^{s_k},$$

საიდანაც

$$\frac{\left|S_{q_{m_k}^{s_k}} f_{m_k}(x)\right|}{\varphi_{q_{m_k}^{s_k}}} \geq \frac{c2^{s_k}}{\varphi_{q_{m_k}^{s_k}}}.$$

აქედან, მივიღებთ

$$\mu\left\{x \in G : \frac{\left|S_{q_{m_k}^{s_k}} f_{m_k}(x)\right|}{\varphi\left(q_{m_k}^{s_k}\right)} \geq \frac{c2^{s_k}}{\varphi\left(q_{m_k}^{s_k}\right)}\right\} \geq \mu\left(I_{s_k+1}(e_{s_k})\right) > c/2^{s_k}. \qquad (2.2.11)$$

(1.5.3)-ის და (2.2.11)-ის გაერთიანებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
& \frac{\frac{c2^{s_k}}{\varphi_{q_{m_k}^{s_k}}}\left(\mu\left\{x \in G : \frac{\left|S_{q_{m_k}^{s_k}} f_{m_k}(x)\right|}{\varphi_{q_{m_k}^{s_k}}} \geq \frac{c2^{s_k}}{\varphi_{q_{m_k}^{s_k}}}\right\}\right)^{1/p}}{\|f_{m_k}\|_{H_p(G)}} \\
\geq\ & \frac{c_p 2^{s_k}}{\varphi_{q_{m_k}^{s_k}} 2^{m_k(1-1/p)}} \frac{1}{2^{s_k/p}} \\
=\ & \frac{c_p 2^{m_k(1/p-1)}}{2^{s_k(1/p-1)}\varphi_{q_{m_k}^{s_k}}} \\
=\ & \frac{c_p 2^{\rho\left(q_{m_k}^{s_k}\right)(1/p-1)}}{\varphi_{q_{m_k}^{s_k}}} \to \infty, \quad \text{როცა} \quad k \to \infty,
\end{aligned}$$

და თეორემის ბ) ნაწილიც დამტკიცებულია, რაც ასრულებს თეორემის დამტკიცებას. ■

თეორემა 2.1-დან მივიღებთ შემდეგ შედეგს (იხ. [102, 103]):

შედეგი 2.3. *ვთქვათ $0 < p < 1$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $S^{*,\triangle}$, რომელიც განმარტებულია ტოლობით*

$$S^{*,\triangle} f := \sup_{k\in\mathbb{N}} |S_{2^k} f|$$

არის სუსტი (H_p, L_p) ტიპის.

უფრო მეტიც, თეორემა 2.1 და თეორემა 2.2 გამოყენებით მივიღებთ შემდეგ შედეგს (დეტალებისთვის იხ. წიგნი [69]):

შედეგი 2.4. *ვთქვათ $0 < p < 1$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{S}^{*,\nabla}$, რომელიც განმარტებულია შემდეგნაირად*

$$S^{*,\nabla} f := \sup_{k\in\mathbb{N}} |S_{m_k} f|$$

არის სუსტი (H_p, L_p) ტიპის, როცა შესრულებულია პირობა

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \rho\left(m_k\right) < c < \infty.$$

შედეგი 2.5. *ა) ვთქვათ* $0 < p < 1$ *და* $f \in H_p\left(G\right)$. *მაშინ, წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი, რომელიც განმარტებულია ტოლობით*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\left|S_{2^k+2^{k/2}}f\right|}{2^{\frac{k}{2}(1/p-1)}}$$

არის სუსტი (H_p, L_p) *ტიპის.*

ბ) (განუზოგადებლობა) ვთქათ $\{\varphi_k\}$ *არის ნებისმიერი, არაუარყოფითი, არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{2^{\frac{k}{2}(1/p-1)}}{\varphi_k} = \infty.$$

მაშინ არსებობს p*-ატომების* $\{f_k, n \in \mathbb{N}\}$ *მიმდევრობა, ისეთი, რომ*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\left\|\frac{S_{2^k+2^{k/2}}f_k}{\varphi_{2^k+2^{k/2}}}\right\|_{L_{p,\infty}}}{\left\|f_k\right\|_{H_p}} = \infty.$$

შედეგი 2.6. *ა) ვთქვათ* $0 < p < 1$ *და* $f \in H_p\left(G\right)$. *მაშინ, წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი, რომელიც განმარტებულია ტოლობით*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\left|S_{2^k+1}f\right|}{2^{k(1/p-2)}}$$

არის სუსტი (H_p, L_p) *ტიპის.*

ბ) (განუზოგადებლობა) ვთქვათ $\{\varphi_k\}$ *არის ნებისმიერი, არაუარყოფითი, არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{2^{k(1/p-1)}}{\varphi_k} = \infty.$$

მაშინ არსებობს p*-ატომების* $\{f_k, k \in \mathbb{N}\}$ *მიმდევრობა, ისეთი, რომ*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\left\|\frac{S_{2^k+1}f_k}{\varphi(2^k+1)}\right\|_{L_{p,\infty}}}{\left\|f_k\right\|_{H_p}} = \infty.$$

წინა თეორემებსა და შედეგებში განხილული იყო სუსტი (H_p, L_p) ტიპის უტოლობები, როცა $0 < p < 1$. ახლა ჩვენ განვიხილავთ (H_p, L_p) ტიპის უტოლობებს უოლშ-ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების წონიანი მაქსიმალური ოპერატორებისთვის, როცა $0 < p < 1$.

შემდეგი თეორემები და შედეგები (იხ. თეორემა 2.7, შედეგი 2.8, თეორემა 2.9, შედეგი 2.10, შენიშვნა 2.11, შედეგი 2.12) დამტიცებულია [13]-ში:

თეორემა 2.7. *ვთქვათ* $0 < p < 1$, $f \in H_p\left(G\right)$ *და* $\varphi : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{R}_+$ *არის ნებისმიერი არაუარყოფითი და*

არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi_k^p}<c<\infty. \tag{2.2.12}$$

მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{S}^{*,\nabla}$, *რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად*

$$\widetilde{S}^{*,\nabla}f:=\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{|S_nf|}{2^{\rho(n)(1/p-1)}\varphi_{\rho(n)}},$$

შემოსაზღვრულია მარტინგალური ჰარდის $H_p(G)$ *სივრციდან ლებეგის* $L_p(G)$ *სივრცეში.*

დამტკიცება. თუ გამოვიყენებთ ლემა 1.5-ს, თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ

$$\int_G\left|\widetilde{S}^{*,\nabla}a(x)\right|^p d\mu(x)\le c<\infty, \tag{2.2.13}$$

სადაც a არის ნებისმიერი p-ატომი, რომელსაც აქვს სუპორტი I, რომლისთვისაც $\mu(I)=2^{-M}$. ზოგადობის შეუზღუდავად, ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხოთ, რომ a-ს სუპორტია $I=I_M$. ადვილი საჩვენებელია, რომ $S_na(x)=0$, სადაც $n\le 2^M$, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $n>2^M$. თუ გავითვალისწინებთ შეფასებას $\|a\|_\infty\le 2^{M/p}$ მივიღებთ

$$\begin{aligned}&\left|\frac{S_na(x)}{2^{(1/p-1)\rho(n)}\varphi_{\rho(n)}}\right|\\ \le\ &\frac{1}{2^{(1/p-1)\rho(n)}\varphi_{\rho(n)}}\|a\|_\infty\int_{I_M}|D_n(x+t)|\,d\mu(t)\\ \le\ &\frac{1}{2^{(1/p-1)\rho(n)}\varphi_{\rho(n)}}2^{M/p}\int_{I_M}|D_n(x+t)|\,d\mu(t).\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

ვთქვათ $x\in I_M$. რადგან

$$V(n)\le\rho(n)+2,$$

(2.1.3)-ის გამოყენებით ადვილად მივიღებთ

$$\begin{aligned}&\left|\frac{S_na(x)}{2^{(1/p-1)\rho(n)}\varphi_{\rho(n)}}\right|\\ \le\ &\frac{1}{2^{(1/p-1)\rho(n)}\varphi_{\rho(n)}}2^{M/p}\int_G|D_n(t)|\,d\mu(t)\\ \le\ &2^{M/p}\frac{1}{2^{(1/p-1)\rho(n)}\varphi_{\rho(n)}}V(n)\\ \le\ &2^{M/p}\rho(n)\,\frac{1}{2^{(1/p-1)\rho(n)}\varphi_{\rho(n)}}\\ \le\ &c2^{M/p},\end{aligned}$$

საიდანაც

$$\int_{I_M}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{S_na(x)}{2^{(1/p-1)\rho(n)}\varphi_{\rho(n)}}\right|\right)^p d\mu(x)<c_p<\infty. \tag{2.2.15}$$

ვთქვათ $x\in I_s\setminus I_{s+1}$ სადაც

$$0\leq s\leq M-1<[n] \text{ ან } 0\leq s<[n]\leq M-1.$$

მაშინ $t\in I_M$-თვის ასევე გვექნება $x+t\in I_s\setminus I_{s+1}$. ამის შემდეგ, თუ გავითვალისწინებთ (1.3.2) და (1.3.3) ტოლობებს მივიღებთ, რომ

$$D_n\left(x+t\right)=0$$

და

$$\left|\frac{S_na(x)}{2^{(1/p-1)\rho(n)}\varphi_{\rho(n)}}\right|=0. \tag{2.2.16}$$

ვთქვათ $x\in I_s\setminus I_{s+1}$, სადაც $[n]\leq s\leq M-1$. მაშინ $x+t\in I_s\setminus I_{s+1}$, სადაც $t\in I_M$. თუ გამოვიყენებთ ლემა (1.1)-ს და უტოლობა (2.2.14)-ს, მივიღებთ

$$\begin{aligned}&\left|\frac{S_na(x)}{2^{(1/p-1)\rho(n)}\varphi_{\rho(n)}}\right| \\ \leq\ & \frac{c}{2^{(1/p-1)\rho(n)}\varphi_{\rho(n)}}2^{M/p}\frac{2^s}{2^M} \\ \leq\ & \frac{c2^{M(1/p-1)}}{2^{|n|(1/p-1)}}\frac{2^{[n](1/p-1)}2^s}{\varphi_{\rho(n)}}.\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

თუ $0<[n]<s/2$, (2.2.17)-დან მიიღება

$$\begin{aligned}\left|\frac{S_na(x)}{2^{(1/p-1)\rho(n)}\varphi_{\rho(n)}}\right| &\leq \frac{c2^{M(1/p-1)}}{2^{|n|(1/p-1)}}\frac{2^{[n](1/p-1)}2^s}{\varphi_{\rho(n)}} \\ &\leq \frac{2^{(s/2)(1/p-1)}2^s}{\varphi_{\rho(n)}} \\ &\leq 2^{(s/2)(1/p+1)}.\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

მეორეს მხრივ, თუ $s/2\leq[n]\leq s$, მაშინ (2.2.17) ფასდება შემდეგნაირად

$$\begin{aligned}\left|\frac{S_na(x)}{2^{(1/p-1)\rho(n)}\varphi_{\rho(n)}}\right| &\leq \frac{c2^{M(1/p-1)}}{2^{|n|(1/p-1)}}\frac{2^{s/p}}{\varphi_{\rho(n)}} \\ &\leq \frac{2^{s/p}}{\varphi_{\rho(n)}} \\ &\leq \frac{2^{s/p}}{\varphi_{M-s}}.\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

თუ შევკრებთ (2.2.16), (2.2.18) და (2.2.19) უტოლობებში გადმოცემულ შეფასებებს, როცა $x \in I_s \setminus I_{s+1}$, $0 \leq s \leq M-1$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \widetilde{S}^{*,\nabla} a(x) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{S_n a(x)}{2^{(1/p-1)\rho(n)} \varphi_{\rho(n)}} \right| \\ &\leq c 2^{(s/2)(1/p+1)} + \frac{c 2^{s/p}}{\varphi_{M-s}}. \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

(1.1.1)-ის და (2.2.20)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} &\int_{\overline{I_M}} \left| \widetilde{S}^{*,\nabla} a(x) \right|^p d\mu(x) \\ \leq\ & c_p \sum_{s=0}^{M-1} \int_{I_s \setminus I_{s+1}} \left| 2^{(s/2)(1/p+1)} + \frac{2^{s/p}}{\varphi_{M-s}} \right|^p d\mu(x) \\ \leq\ & c_p \sum_{s=0}^{M-1} \int_{I_s \setminus I_{s+1}} \left| 2^{(s/2)(1/p+1)} \right|^p d\mu(x) + c_p \sum_{s=0}^{M-1} \int_{I_s \setminus I_{s+1}} \left| \frac{2^{s/p}}{\varphi_{M-s}} \right|^p d\mu(x) \\ \leq\ & c_p \sum_{s=0}^{M-1} \frac{1}{2^s} 2^{(s/2)(1+p)} + c_p \sum_{s=0}^{M-1} \frac{1}{2^s} \frac{2^s}{\varphi_{M-s}^p} \\ \leq\ & c_p \sum_{s=0}^{M-1} 2^{(s/2)(p-1)} + c_p \sum_{s=0}^{M-1} \frac{1}{\varphi_{M-s}^p} \leq c_p < \infty. \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

საბოლოოდ, (2.2.15) და (2.2.21) შეფასებების გათვალისწინებით, ჩვენ დავასკვნით, რომ შესრულებულია (2.2.13) უტოლობა, რაც ასრულებს თეორემის დამტკიცებას. ■

თეორემა 2.7 განსაკუთრებით საინტერესოა იმ შემთხვევაში, როცა განვიხილავთ ქვემიმდევრობებს.

შედეგი 2.8. *ვთქვათ $0 < p < 1$, $f \in H_p(G)$ და $\{\varphi_k\}$ არის ნებისმიერი არაუარყოფითი და არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (2.2.12) პირობას და $\{m_k,\ k \geq 0\}$ არის დადებითი ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა. მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{S}^{*,\nabla}$, რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად*

$$\widetilde{S}^{*,\nabla} f = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_{m_k} f|}{2^{\rho(m_k)(1/p-1)} \varphi_{\rho(m_k)}}, \tag{2.2.22}$$

არის ძლიერი (H_p, L_p) ტიპის.

ჩვენ ასევე დავამტკიცებთ თეორემა 2.7-ის გაუძლიერებადობას:

თეორემა 2.9. *ვთქვათ $0 < p < 1$ და $\{\varphi_k\}$ არის ნებისმიერი არაუარყოფითი, არაკლებადი რიცხვების მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_k^p} = \infty. \tag{2.2.23}$$

მაშინ არსებობს p*-ატომების* f_k *მიმდევრობა, ისეთი, რომ*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{|S_nf_k|}{2^{\rho(n)(1/p-1)}\varphi_{\rho(n)}}\right\|_p}{\|f_k\|_{H_p}}=\infty.$$

დამტკიცება. (2.2.23) პირობის გათვალისწინებით ჩვენ მივიღებთ

$$\left(\sum_{s=0}^{n_k-1}\frac{1}{\varphi_s^p}\right)^{1/p}\to\infty,\quad \text{როცა}\quad k\to\infty. \tag{2.2.24}$$

განვიხილოთ შემდეგი p-ატომების (1.5.1) მიმდევრობა, რომელიც მოცემულია მაგალით (1.3)-ში

$$f_{m_k}=D_{2^{m_k+1}}-D_{2^{m_k}},\qquad m_k\geq 3.$$

ვთქვათ $q_{m_k}^s\in\mathbb{N}$ არის ისეთი ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

$$2^{m_k}\leq q_{m_k}^s\leq 2^{m_k+1}\quad \text{და}\ \ [q_{m_k}^s]=s,\quad \text{სადაც}\quad 0\leq s<m_k.$$

თუ გავითვალისწინებთ (1.5.2)-ს ჩვენ მივიღებთ

$$\begin{aligned}\left|S_{q_{m_k}^s}f_{m_k}(x)\right| &= \left|D_{q_{m_k}^s}(x)-D_{2^{m_k}}(x)\right|\\ &= \left|D_{q_{m_k}^s-2^{m_k}}(x)\right|\end{aligned}$$

ვთქვათ $x\in I_s\setminus I_{s+1}$. მაშინ, ლემა 1.2-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\left|S_{q_{m_k}^s}f_{m_k}(x)\right|\geq c2^s$$

და

$$\frac{\left|S_{q_{m_k}^s}f_{m_k}(x)\right|}{2^{(1/p-1)\rho\left(q_{m_k}^s\right)}\varphi_{\rho\left(q_{m_k}^s\right)}}\geq\frac{c_p2^{s/p}}{2^{m_k(1/p-1)}\varphi_{m_k-s}}.$$

აქედან,

$$\begin{aligned}&\int_G\left(\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{\left|S_{q_{m_k}^s}f_{m_k}(x)\right|}{2^{(1/p-1)\rho\left(q_{m_k}^s\right)}\varphi_{\rho\left(q_{m_k}^s\right)}}\right|\right)^p d\mu(x)\\ \geq\ & c_p\sum_{s=0}^{m_k-1}\int_{I_s\setminus I_{s+1}}\left(\frac{2^{s/p}}{2^{m_k(1/p-1)}\varphi_{m_k-s}}\right)^p d\mu(x)\\ \geq\ & c_p\sum_{s=0}^{m_k-1}\frac{1}{2^s}\frac{2^s}{2^{m_k(1-p)}\varphi_{m_k-s}^p}\\ \geq\ & \frac{C_p}{2^{m_k(1-p)}}\sum_{s=1}^{m_k}\frac{1}{\varphi_s^p}.\end{aligned}$$

საბოლოოდ, (2.2.24)-ის და (1.5.3)-ის გაერთიანებით ჩვენ მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left(\int_G \left(\sup_{k\in\mathbb{N}}\sup_{0\leq s<m_k}\left|\frac{\left|S_{q^s_{m_k}} f_{m_k}\right|}{2^{(1/p-1)\rho\left(q^s_{m_k}\right)}\varphi_{\rho\left(q^s_{m_k}\right)}}\right|\right)^p d\mu\right)^{1/p}}{\|f_{m_k}\|_{H_p}} \\
\geq\ & \frac{\left(\frac{c_p}{2^{m_k(1-p)}}\sum_{s=1}^{m_k}\frac{1}{\varphi_s^p}\right)^{1/p}}{2^{m_k(1/p-1)}} \\
\geq\ & c_p\left(\sum_{s=1}^{m_k}\frac{1}{\varphi_s^p}\right)^{1/p} \to \infty, \text{ როცა } k\to\infty.
\end{aligned}
$$

თეორემა დამტკიცებულია. ■

თუ განვიხილავთ შემდეგ მიმდევრობას

$$\varphi_k = \left(k\log^{1+\varepsilon}k\right)^{1/p}, \text{ სადაც } \varepsilon>0,$$

მაშინ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ შესრულებულია (2.2.12) პირობა, ხოლო თუ ავიღებთ

$$\varphi_k = (k\log k)^{1/p}$$

მიმდევრობას, მაშინ სრულდება (2.2.23) პირობა. ყოველივე ამის გათვალისწინებით, თეორემა 2.7-ს და თეორემა 2.9-ს დაუყოვნებლივ მოჰყვება შემდეგი განუზოგადებელი შედეგი:

შედეგი 2.10. *ვთქვათ $0<p<1$ და $f\in H_p(G)$. მაშინ, წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{S}^{*,\nabla,\varepsilon}$, რომელიც განიმარტება ტოლობით*

$$\widetilde{S}^{*,\nabla,\varepsilon}f := \sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{|S_kf|}{2^{\rho(k)(1/p-1)}\left(\rho(k)\log^{1+\varepsilon}\rho(k)\right)^{1/p}},$$

არის ძლიერი (H_p,L_p) ტიპის, როცა $\varepsilon>0$ და არ არის ძლიერი (H_p,L_p) ტიპის, როცა $\varepsilon=0$.

შენიშვნა 2.11. *ვთქვათ $\{m_k,\ k\geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}[m_k]<c<\infty,$$

რასაც ავტომატურად მოჰყვება

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\rho(m_k)=\infty.$$

მაშინ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\varphi([m_k])<\varphi(c)<\infty,$$

$$2^{\rho(m_k)(1/p-1)} \sim 2^{|m_k|(1/p-1)} \sim m_k^{1/p-1} \sim (m_k+1)^{1/p-1}$$

და

$$\widetilde{S}^{*,\nabla} f \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_{m_k} f|}{(m_k+1)^{1/p-1}}.$$

ვთქვათ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} [m_k] = \infty.$$

ამ შემთხვევაში (2.2.22) *მაქსიმალური ოპერატორისთვის უკვე აღარაა სამართლიანი შეფასება*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_{m_k} f|}{(m_k+1)^{1/p-1}} \leq \widetilde{S}^{*,\nabla} f.$$

თეორემა 2.7-ის, შენიშვნა 2.11-ის და [85]-ში დამტკიცებული თეორემის გამოყენებით ჩვენ დავასკვნით:

შედეგი 2.12. *თუ* $0<p<1$, $f\in H_p(G)$ *და* $\{\varphi_k\}$ *არის ნებისმიერი არაუარყოფითი, არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს* (2.2.12) *პირობას, მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი* $\widetilde{S}^{*,\nabla}$, *რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად*

$$\widetilde{S}^{*,\nabla} f := \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_k f|}{\min\{2^{\rho(k)(1/p-1)}\varphi(\rho(k)),(k+1)^{1/p-1}\}},$$

არის ძლიერი (H_p, L_p) *ტიპის.*

[13]-ში დამტკიცებულ და თეზისში აქამდე მოყვანილ თეორემებსა და შედეგებში განხილული იყო (H_p, L_p) ტიპის უტოლობები, როცა $0<p<1$, მაგრამ, როგორც შენიშვნა 2.11-დან ჩანს ეს წონიანი მაქსიმალური ოპერატორები გარკვეული აზრით უფრო ცუდია, სხვა წონიანი მაქსიმალური ოპერატორებთან შედარებით, რომლებიც მანამდე იყო ცნობილი და შემოსაზღვრულობის გარანტიას მაინც იძლეოდნენ. ეს ხდება იმ შემთხვევაში, როცა $\{m_k\}$ ქვემიმდევრობა აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} [m_k] < c < \infty, \tag{2.2.25}$$

მეორეს მხრივ ამ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორებისთვის გვაქვს უკეთესი შედეგები, იმ შემთხვევაში, როცა

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \rho(m_k) = \infty. \tag{2.2.26}$$

ახლა ჩვენ განვიხილავთ (H_p, L_p) ტიპის უტოლობებს უოლშ-ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების წონიანი მაქსიმალური ოპერატორებისთვის, როცა $0<p<1$, მაგრამ ამ შემთხვევაში გვაქვს უკეთესი შედეგები ისეთი ქვემიმდევრობებისთვის, რომლებიც აკმაყოფილებს (2.2.25) პირობას და გვაქვს უფრო ცუდი შემთხვევა, როცა დაკმაყოფილებულია პირობა (2.2.26).

შემდეგი თეორემები და შედეგები (იხილეთ თეორემა 2.13, თეორემა 2.14, შედეგი 2.15, შედეგი 2.16, შედეგი 2.17, შედეგი 2.18, შედეგი 2.19, შედეგი 2.20, შედეგი 2.21, შედეგი 2.22, შედეგი 2.23)

დამტკიცებულია [5]-ში.

თეორემა 2.13. *ვთქვათ* $0<p<1$, $f\in H_p(G)$ *და* $\{m_k,\ k\geq 0\}$ *არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა და*

$$\{m_{s_i},\ 1\leq i\leq r\}\subset\{m_k,\ k\geq 0\}$$

არის ისეთი ქვემიმდევრობა, რომ

$$2^s\leq m_{s_1}\leq m_{s_2}\leq\cdots\leq m_{s_r}\leq 2^{s+1},\ s\in\mathbb{N}.$$

მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}$, *რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად*

$$\widetilde{S}^{*,\nabla}f:=\sup_{s\in\mathbb{N}}\sup_{2^s\leq m_{s_i}<2^{s+1}}\frac{\left|S_{m_{s_i}}f\right|}{2^{\rho_s\left(m_{s_i}\right)(1/p-1)}},$$

სადაც $\rho_s\left(m_{s_i}\right)$ *განიმარტება (1.2.1) ტოლობით, შემოსაზღვრულია მარტინგალური ჰარდის* $H_p(G)$ *სივრციდან ლებეგის* $L_p(G)$ *სივრცეში.*

დამტკიცება. რადგან ოპერატორი

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{S_{m_k}f}{2^{\rho_{|m_k|}(m_k)(1/p-1)}}\right|$$

შემოსაზღვრულია $L_\infty(G)$-დან $L_\infty(G)$-ში, თუ ისევ ვისარგებლებთ ლემა 1.5-ით და წინა თეორემაში გამოყენებული მსჯელობით, მაშინ ჩვენი ჰიპოთეზის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ

$$\int_{\overline{I_M}}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{S_{m_k}a(x)}{2^{\rho_{|m_k|}(m_k)(1/p-1)}}\right|\right)^p d\mu(x)\leq c<\infty,\quad \text{როცა}\quad m_k>2^M, \tag{2.2.27}$$

სადაც a არის ნებისმიერი p-ატომი, რომელსაც აქვს სუპორტი I_M, რომლისთვისაც $\mu(I_M)=2^{-M}$.

ვთქვათ $2^s\leq m_{s_i}<2^{s+1}$, სადაც $s\geq M$. რადგან $\|a\|_\infty\leq 2^{M/p}$, მივიღებთ

$$\begin{aligned}\frac{\left|S_{m_{s_i}}a(x)\right|}{2^{\rho_s\left(m_{s_i}\right)(1/p-1)}} &\leq \frac{1}{2^{\rho_s\left(m_{s_i}\right)(1/p-1)}}\|a\|_\infty\int_{I_M}\left|D_{m_{s_i}}(x+t)\right|d\mu(t)\\ &\leq \frac{1}{2^{\rho_s\left(m_{s_i}\right)(1/p-1)}}2^{M/p}\int_{I_M}\left|D_{m_{s_i}}(x+t)\right|d\mu(t).\end{aligned}$$

ვთქვათ $t\in I_M$ და $x\in I_k\setminus I_{k+1},\ 0\leq k\leq M-1<[n]$ ან $0\leq k<[n]\leq M-1$. მაშინ $x+t\in I_k\setminus I_{k+1}$. თუ გავითვალისწინებთ (1.3.2) და (1.3.3) ტოლობებს მივიღებთ, რომ $D_n(x+t)=0$ და

$$D_{m_{s_i}}(x+t)=0,\quad \text{სადაც}\quad t\in I_M$$

და

$$\frac{\left|S_{m_{s_i}}a(x)\right|}{2^{\rho_s\left(m_{s_i}\right)(1/p-1)}}=0,\quad \text{სადაც}\quad 2^s\leq m_{s_i}<2^{s+1}.$$

მას შემდეგ რაც $[m_{s_i}] \geq s_-$, ჩვენ დავასკვნით

$$\sup_{2^s \leq m_{s_i} < 2^{s+1}} \frac{\left|S_{m_{s_i}} a\,(x)\right|}{2^{\rho_s\left(m_{s_i}\right)(1/p-2)}} = 0. \tag{2.2.28}$$

ვთქვათ $x \in I_k \setminus I_{k+1}$, $[n] \leq k \leq M-1$. მაშინ $x+t \in I_k \setminus I_{k+1}$, სადაც $t \in I_M$ და თუ გამოვიყენებთ ლემა 1.1-ს, ჩვენ დავასკვნით

$$\begin{aligned} \frac{\left|S_{m_{s_i}} a\,(x)\right|}{2^{\rho_s\left(m_{s_i}\right)(1/p-1)}} &\leq \frac{2^{M(1/p-1)+k}}{2^{\rho_s\left(m_{s_i}\right)(1/p-1)}} \\ &\leq \frac{2^{M(1/p-1)}}{2^{s(1/p-1)}} 2^{k+s_-(1/p-1)}. \end{aligned} \tag{2.2.29}$$

(2.2.28)-ის და (2.2.29)-ის გაერთიანებით ნებისმიერი $x \in I_k \setminus I_{k+1}$-თვის, სადაც $[n] \leq k \leq M-1$ ჩვენ გვაქვს

$$\sup_{2^s \leq m_{s_i} < 2^{s+1}} \frac{\left|S_{m_{s_i}} a\,(x)\right|}{2^{\rho_s\left(m_{s_i}\right)(1/p-1)}} \leq \frac{2^{M(1/p-1)}}{2^{s(1/p-1)}} 2^{k+s_-(1/p-1)}. \tag{2.2.30}$$

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას

$$\widetilde{S}^*_s f := \sup_{2^s \leq m_{s_i} < 2^{s+1}} \frac{\left|S_{m_{s_i}} f\right|}{2^{\rho_s\left(m_{s_i}\right)(1/p-1)}},$$

მაშინ მივიღებთ

$$\left(\sup_{k \in \mathbb{N}} \left|\frac{S_{m_k} a(x)}{2^{\rho_s(m_k)(1/p-1)}}\right|\right)^p \leq \sum_{s=M}^{\infty} \left|\widetilde{S}^*_s a(x)\right|^p. \tag{2.2.31}$$

(1.1.1)-ის და (2.2.31)-ის გათვალისწინებით დავასკვნით

$$\begin{aligned} &\int_{\overline{I_M}} \left(\sup_{k \in \mathbb{N}} \left|\frac{S_{m_k} a(x)}{2^{\rho_s(m_k)(1/p-1)}}\right|\right)^p d\mu\,(x) \\ \leq\ &\sum_{s=M}^{\infty} \int_{\overline{I_M}} \left|\widetilde{S}^*_s a(x)\right|^p d\mu\,(x) \\ \leq\ &c_p \sum_{s=M}^{\infty} \frac{2^{M(1/p-1)}}{2^{s(1/p-1)}} \sum_{k=s_-}^{M-1} \int_{I_k \setminus I_{k+1}} 2^{kp+s_-(1-p)} d\mu\,(x) \\ \leq\ &c_p \sum_{k=s_-}^{M-1} \frac{2^{s_-(p-1)}}{2^{k(1-p)}} \leq c_p < \infty. \end{aligned} \tag{2.2.32}$$

თუ გამოვიყენებთ (2.2.32)-ს დავასკვნით, რომ სრულდება (2.2.27), რაც ასრულებს თეორემის დამტკიცებას. ■

ჩვენ ასევე დავამტკიცებთ თეორემა 2.13-ის განუზოგადებლობას შემდეგი აზრით:

თეორემა 2.14. *ვთქვათ* $0 < p < 1$, $f \in H_p(G)$ *და* $\{m_k,\ k \geq 0\}$ *არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა და*

$$\{m_{s_i},\ 1 \leq i \leq r\} \subset \{m_k,\ k \geq 0\}$$

არის ისეთი ქვემიმდევრობა, რომ სამართლიანია

$$2^s \leq m_{s_1} \leq m_{s_2} \leq \cdots \leq m_{s_r} \leq 2^{s+1},\ s \in \mathbb{N}.$$

მაშინ ნებისმიერი არაუარყოფითი, არაკლებადი $\{\varphi_k\}$ *მიმდევრობისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას*

$$\sup_{s\in\mathbb{N}} \sup_{2^s \leq m_{s_i} < 2^{s+1}} \frac{2^{\rho_s\left(m_{s_i}\right)(1/p-1)}}{\varphi_{m_{s_i}}} = \infty, \tag{2.2.33}$$

არსებობს p*-ატომების* f_s *მიმდევრობა, ისეთი, რომ*

$$\sup_{s\in\mathbb{N}} \frac{\left\| \sup_{2^s \leq m_{s_i} < 2^{s+1}} \frac{\left|S_{m_{s_i}} f_s\right|}{\varphi_{m_{s_i}}} \right\|_p}{\|f_s\|_{H_p}} = \infty.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $q_{m_k}^s \in \mathbb{N}$ არის ისეთი ნატურალური რიცხვების მიმდევრობა, რომლისთვისაც

$$2^{m_k} \leq q_{m_k}^s \leq 2^{m_k+1},\ \text{ სადაც }\ 0 \leq s < 2^{m_k}.$$

თუ s_0 არის ისეთი, ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც $q_{m_k}^{s_0} = s_-$, მაშინ ჩვენ მივიღებთ

$$\rho_{m_k}(q_{m_k^s}) = m_k - s_- = \rho(q_{m_k}^{s_0}).$$

(2.2.33)-ის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{2^{\rho(q_{m_{k_0}}^{s_0})(1/p-1)}}{\varphi_{q_{m_k}^{s_0}}^p} \to \infty, \quad \text{როცა} \quad k \to \infty. \tag{2.2.34}$$

განვიხილოთ შემდეგი p-ატომების (1.5.1) მიმდევრობა, რომელიც მოცემულია მაგალით (1.3)-ში

$$f_{m_k} = D_{2^{m_k+1}} - D_{2^{m_k}}, \qquad n_k \geq 3.$$

ვთქვათ $q_{m_k}^s \in \mathbb{N}$ არის ისეთი მიმდევრობა, რომლისთვისაც

$$2^{m_k} \leq q_{m_k}^s \leq 2^{m_k+1},\ \text{ სადაც }\ 0 \leq s < m_k.$$

(1.5.2)-ის გათვალისწინებით გვაქვს შემდეგი ტოლობა

$$\begin{aligned}\left|S_{q^s_{m_k}} f_{m_k}(x)\right| &= \left|D_{q^s_{m_k}}(x) - D_{2^{m_k}}(x)\right| \\ &= \left|D_{q^s_{m_k}-2^{m_k}}(x)\right|.\end{aligned}$$

ვთქვათ $q^{s_0}_{m_k}$ არის ისეთი რიცხვები, რომ

$$[q^{s_0}_{m_k}] = s_- \quad \text{და} \quad x \in I_{s_-+1}\left(e_{s_--1} + e_{s_-}\right).$$

ლემა 1.2-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\left|S_{q^{s_0}_{m_k}} f_{n_k}(x)\right| \geq c2^{s_-}$$

და

$$\frac{\left|S_{q^{s_0}_{m_k}} f_{m_k}(x)\right|}{\varphi_{q^{s_0}_{m_k}}} \geq \frac{c2^{s_-}}{\varphi_{q^{s_0}_{m_k}}}.$$

აქედან,

$$\begin{aligned}&\int_G \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\left|S_{q^s_{m_k}} f_{m_k}(x)\right|}{\varphi_{q^s_{m_k}}}\right)^p d\mu(x) \\ \geq\;& \int_{I_{s_-+1}\left(e_{s_--1}+e_{s_-}\right)} \left(\frac{\left|S_{q^{s_0}_{m_k}} f_{m_k}(x)\right|}{\varphi_{q^{s_0}_{m_k}}}\right)^p d\mu(x) \\ \geq\;& c_p \frac{1}{2^{s_-}} \frac{2^{ps_-}}{\varphi^p_{q^{s_0}_{m_k}}} \\ \geq\;& \frac{C_p 2^{(p-1)s_-}}{\varphi^p_{q^{s_0}_{m_k}}}.\end{aligned}$$

საბოლოოდ, (2.2.34)-ის და (1.5.3)-ის გაერთიანებით დავასკვნით

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\int_G \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{0\leq s<m_k} \frac{\left|S_{q^s_{m_k}} f_{m_k}(x)\right|}{\varphi_{q^s_{m_k}}}\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p}}{\|f_{m_k}\|_{H_p}} \\ \geq\;& \frac{C_p 2^{(1-1/p)s_-}}{\varphi(q^{s_0}_{m_k})} \frac{1}{2^{m_k(1-1/p)}} \\ =\;& \frac{C_p 2^{m_k(1/p-1)}}{\varphi_{q^{s_0}_{m_k}} 2^{s_-(1/p-1)}} \\ =\;& \frac{C_p 2^{\rho(q^{s_0}_{m_k})(1/p-1)}}{\varphi_{q^{s_0}_{m_k}}} \to \infty, \quad \text{როცა} \quad k \to \infty.\end{aligned}$$

თეორემა დამტკიცებულია. ■

თეორემა 2.1-დან მივიღებთ ვეისის შემდეგ შედეგს [103] (იხ. აგრეთვე [102]):

შედეგი 2.15. *ვთქვათ $p>0$ და $f\in H_p(G)$. მაშინ, მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{S}_1^{*,\nabla}$, რომელიც განმარტებულია ტოლობით*

$$\widetilde{S}_1^{*,\nabla}f:=\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|S_{2^k}f\right|,$$

არის ძლიერი (H_p,L_p) ტიპის.

უფრო მეტიც, თეორემა 2.13 და თეორემა 2.14 გამოყენებით მივიღებთ შემდეგ შედეგს (დეტალებისთვის იხ. წიგნი [69]):

შედეგი 2.16. *ვთქვათ $0<p<1$ და $f\in H_p(G)$. მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{S}^{*,\nabla}$, რომელიც განმარტებულია შემდეგნაირად*

$$S^{*,\nabla}f:=\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|S_{m_k}f\right|$$

არის ძლიერი (H_p,L_p) ტიპის, როცა შესრულებულია პირობა

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\rho_s(m_k)<c<\infty,$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\rho(m_k)<c<\infty.$$

იმისთვის რომ მოხდეს ლიტერატურაში ცნობილ ზოგიერთ შედეგთან, ასევე მოვიყვანოთ ჩვენს მიერ დამტკიცებული თეორემებიდან მიღებულ ახალ შედეგებსაც:

შედეგი 2.17. *ვთქვათ $p>0$ და $f\in H_p(G)$. მაშინ, წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{S}_2^{*,\nabla}$, რომელიც განმარტებულია ტოლობით*

$$\widetilde{S}_2^{*,\nabla}f:=\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|S_{2^k+2^{k-1}}f\right|,$$

არის ძლიერი (H_p,L_p) ტიპის.

შედეგი 2.18. *ვთქვათ $0<p<1$ და $f\in H_p(G)$. მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{S}_i^{*,\nabla}$, $i=3,4$, რომლებიც განმარტებულია ტოლობით*

$$\widetilde{S}_3^{*,\nabla}f:=\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{\left|S_{2^k+2^{[k/2]}}f\right|}{2^{k(1/p-1)/2}}$$

და

$$\widetilde{S}_4^{*,\nabla}f:=\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{\left|S_{2^k+2^{[k/3]}}f\right|}{2^{\frac{2}{3}k(1/p-1)}},$$

სადაც $[n]$ აღნიშნავს n რიცხვის მთელ ნაწილს, არიან ძლიერი (H_p,L_p) ტიპის.

შედეგი 2.19. *ვთქვათ* $0<p<1,\ f\in H_p(G)$ *და* $\{\alpha_k^s,\ 0\leq k\leq s-1\}$ *არის ნატურალური რიცხვების მიმდევრობა*

$$\begin{aligned}\alpha_0^s &= 2^s+2^0,\\ \alpha_1^s &= 2^s+2^0+2^1,\\ &\dots\\ \alpha_{[\theta s]-1}^s &= 2^s+2^0+2^1+\dots+2^{[\theta s]-1},\ s\in\mathbb{N},\ 0<\theta\leq 1.\end{aligned}$$

მაშინ, წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{S}_5^{*,\nabla}$, *რომელიც განმარტებულია ტოლობით*

$$\widetilde{S}_5^{*,\nabla}f:=\sup_{s\in\mathbb{N}}\sup_{0\leq k\leq s-1}\frac{\left|S_{\alpha_k^s}f\right|}{2^{s(1/p-1)}},$$

არის ძლიერი (H_p,L_p) *ტიპის.*

შედეგი 2.20. *ვთქვათ* $0<p<1,\ f\in H_p(G)$ *და* $\{\beta_k^s,\ 0\leq k\leq s-1\}$ *არის ნატურალური რიცხვების მიმდევრობა*

$$\begin{aligned}\beta_{s-1}^s &= 2^s+2^{s-1},\\ \beta_{s-2}^s &= 2^s+2^{s-1}+2^{s-2},\\ &\dots\\ \beta_{s-[\theta s]-1}^s &= 2^s+2^{s-[\theta s]-1-1},\ s\in\mathbb{N},\ 0<\theta\leq 1.\end{aligned}$$

მაშინ, წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{S}_6^{*,\nabla}$, *რომელიც განმარტებულია ტოლობით*

$$\widetilde{S}_6^{*,\nabla}f:=\sup_{s\in\mathbb{N}}\sup_{0\leq k\leq s-1}\frac{\left|S_{\beta_k^s}f\right|}{2^{(1-\theta)s(1/p-1)}},$$

არის ძლიერი (H_p,L_p) *ტიპის.*

შედეგი 2.21. *ვთქვათ* $0<p<1,\ f\in H_p(G)$ *და* $\{\alpha_k^s,\ 0\leq k\leq s-1\}$ *არის ნატურალური რიცხვების მიმდევრობა*

$$\begin{aligned}\alpha_0^s &= 2^s+2^0,\\ \alpha_1^s &= 2^s+2^0+2^1,\\ &\dots\\ \alpha_{[s^\theta]-1}^s &= 2^s+2^0+2^1+\dots+2^{[s^\theta]-1},\ s\in\mathbb{N},\ 0<\theta<1.\end{aligned}$$

მაშინ, წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{S}_7^{*,\nabla}$, *რომელიც განმარტებულია ტოლობით*

$$\widetilde{S}_7^{*,\nabla}f:=\sup_{s\in\mathbb{N}}\sup_{0\leq k\leq s-1}\frac{\left|S_{\alpha_k^s}f\right|}{2^{s(1/p-1)}},$$

არის (H_p,L_p) *ტიპის.*

შედეგი 2.22. *ვთქვათ* $0<p<1$, $f\in H_p(G)$ *და* $\{\beta_k^s,\ 0\leq k\leq s-1\}$ *არის ნატურალური რიცხვების მიმდევრობა*

$$\begin{aligned}\beta_{s-1}^s &= 2^s+2^{s-1},\\ \beta_{s-2}^s &= 2^s+2^{s-1}+2^{s-2},\\ &\dots\\ \beta_{s-[s^\theta]-1}^s &= 2^s+2^{s-[s^\theta]-1-1},\ s\in\mathbb{N},\ 0<\theta<1.\end{aligned}$$

მაშინ, წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{S}_8^{*,\nabla}$, *რომელიც განმარტებულია ტოლობით*

$$\widetilde{S}_8^{*,\nabla}f:=\sup_{s\in\mathbb{N}}\sup_{0\leq k\leq s-1}\frac{\left|S_{\beta_k^s}f\right|}{2^{(s-s^\theta)(1/p-1)}},$$

არის (H_p,L_p) *ტიპის.*

ბოლოს, ჩვენ მოვიყვანთ თეორემა 2.13-ის და თეორემა 2.14-ის შედეგს, რომელიც დამტკიცებულია ტეფნაძის [85] ნაშრომში:

შედეგი 2.23. *ა) ვთქვათ* $0<p<1$ *და* $f\in H_p(G)$. *მაშინ, წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი* $\tilde{S}^{*,p}$, *რომელიც განმარტებულია ტოლობით*

$$\tilde{S}{}_p^{*}f:=\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{|S_kf|}{(k+1)^{1/p-1}},\quad (0<p<1)$$

არის ძლიერი (H_p,L_p) *ტიპის.*

ბ) ვთქვათ $\{\varphi_k\}$ *არის ნებისმიერი, არაუარყოფითი, არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{(k+1)^{1/p-1}}{\varphi_k}=\infty.$$

მაშინ არსებობს p*-ატომების* $\{f_n,n\in\mathbb{N}\}$ *მიმდევრობა, ისეთი, რომ*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|\frac{S_kf_n}{\varphi_n}\right\|_p=\infty.$$

ახლა განვიხილავთ $p=1$ შემთხვევას. შემდეგი თეორემა (იხ. თეორემა 2.24) დამტკიცებულია სტატია [4]-ში:

თეორემა 2.24. *ა) ვთქვათ* $f\in H_1$. *მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი* $\widetilde{S}^{*,\nabla}$, *რომელიც განმარტებულია ტოლობით*

$$\widetilde{S}^{*,\nabla} f := \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_k f|}{V(k)} \tag{2.2.35}$$

შემოსაზღვრულია მარტინგალური ჰარდის H_1 სივრციდან $L_{1,\infty}$ სივრცეში.

ბ) ვთქვათ $f \in H_1(G)$. მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{S}^{*,\nabla}$, რომელიც განმარტებულია ტოლობით (2.2.35) *არ არის შემოსაზღვრული მარტინგალური ჰარდის $H_1(G)$ სივრციდან ლებეგის $L_1(G)$ სივრცეში.*

დამტკიცება. მას შემდეგ რაც $S_n/V(n)$ შემოსაზღვრულია $L_\infty(G)$ სივრციდან $L_\infty(G)$ სივრცეში, ლემა 1.6-ის გათვალისწინებით და წინა თეორემებში განვითარებული მსჯელობით, ჰიპოთეზა დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენეთ შემდეგი უტოლობის სამართლიანობას

$$t\mu\left\{x \in \overline{I_M} : \widetilde{S}^{*,\nabla} a(x) \geq t\right\} \leq c < \infty, \qquad (\forall\, t \geq 0), \tag{2.2.36}$$

ნებისმიერი a p-ატომისთვის, რომლის სუპორტია $I = I_M$, სადაც $\mu\left(I_M\right) = 2^{-M}$.

რადგან $S_n a\left(x\right) = 0$, სადაც $n \leq 2^M$, ამიტომ განსახილველია მხოლოდ $n > 2^M$ შემთხვევა. თუ გავითვალისწინებთ შეფასებას $\|a\|_\infty \leq 2^M$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{|S_n a\left(x\right)|}{V(n)} &\leq \frac{1}{V(n)} \|a\|_\infty \int_{I_M} |D_n\left(x+t\right)| \mu\left(t\right) \\ &\leq 2^M \int_{I_M} |D_n\left(x+t\right)| \mu\left(t\right). \end{aligned}$$

ვთქვათ $x \in I_s \setminus I_{s+1}$. მაშინ $x+t \in I_s \setminus I_{s+1}$, სადაც $t \in I_M$ და ლემა 1.2-ის ძალით გვექნება

$$D_n\left(x+t\right) \leq c2^s, \;\; \text{სადაც} \;\; t \in I_M$$

და

$$\frac{|S_n a\left(x\right)|}{V(n)} \leq c_p 2^M 2^{s-M} \leq c2^s. \tag{2.2.37}$$

(2.2.37)-ის გამოყენებით ნებისმიერი $x \in I_s \setminus I_{s+1}$, $0 \leq s < M$-თვის მივიღებთ

$$\widetilde{S}^{*,\nabla} a\left(x\right) \leq C2^s. \tag{2.2.38}$$

ამ უტოლობიდან მივიღებთ, რომ როცა $s \leq M$ ჩვენ გვაქვს შემდეგი შეფასება

$$\widetilde{S}^{*,\nabla} a\left(x\right) \leq C2^M \quad \text{როცა} \;\; x \in I_s \setminus I_{s+1}, \;\; s = 0, 1, \cdots, M$$

საიდანაც

$$\mu\left\{x\in I_s\setminus I_{s+1}:\widetilde{S}^{*,\nabla}a\left(x\right)>C2^k\right\}=0,\quad k=M,M+1,\ldots \tag{2.2.39}$$

თუ გამოვიყენებთ (1.1.1) იგივეობას, (2.2.38) უტოლობას, შემდეგ ჩადგმას

$$\left\{x\in\overline{I_M}:\widetilde{S}^{*,\nabla}a\left(x\right)\geq C2^k\right\}\subset\bigcup_{s=k}^{M-1}\left\{x\in I_s\setminus I_{s+1}:\widetilde{S}^{*,\nabla}a\left(x\right)\geq C2^k\right\}$$

მივიღებთ

$$\mu\left\{x\in\overline{I_M}:\widetilde{S}^{*,\nabla}a\left(x\right)\geq C2^k\right\}\leq\sum_{s=k}^{M-1}\frac{1}{2^s}\leq\frac{2}{2^k}. \tag{2.2.40}$$

(2.2.39)-ის და (2.2.40)-ის გათვალისწინებით ჩვენ მივიღებთ

$$2^k\mu\left\{x\in\overline{I_M}:\widetilde{S}^{*,\nabla}a\left(x\right)\geq C2^k\right\}<c<\infty,$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ შესრულებულია (2.2.36) უტოლობა და თეორემის ა) ნაწილი დამტკიცებულია.

ვთქვათ $\{m_k\}$ არის ნატურალური რიცხვების ისეთი ზრდადი ქვემიმდევრობა, რომლისთვისაც $m_k\to\infty$, როცა $k\to\infty$.

განვიხილოთ შემდეგი 1-ატომების (1.5.1) მიმდევრობა, რომელიც მოცემულია მაგალით 1.3-ში $p=1$-თვის

$$f_{m_k}=D_{2^{m_k+1}}-D_{2^{m_k}},\qquad m_k\geq 3.$$

ლემა 1.3-ის გათვალისწინებით ჩვენ მივიღებთ

$$\left\|f_{m_k}\right\|_{H_1}\leq 1$$

და

$$\left|S_{2^{n_k}+2^s}f_{m_k}\left(x\right)\right|\geq c2^s,\quad \text{სადაც}\quad x\in I_{s+1}\left(e_s\right),\ s=0,\cdots,n_k-1.$$

აქედან

$$\begin{aligned}\int_G\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{\left|S_kf_{m_k}\right|}{V\left(k\right)}d\mu &\geq \sum_{s=0}^{m_k-1}\int_{I_{s+1}(e_s)}\frac{\left|S_{2^{m_k}+2^s}f_{n_k}\right|}{V\left(2^{m_k}+2^s\right)}d\mu\\ &\geq c\sum_{s=0}^{m_k-1}\frac{1}{2^s}2^s\geq Cm_k.\end{aligned}$$

საბოლოოდ, მივიღებთ, რომ სამართლიანია შემდეგი

$$\frac{\int_G \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_k f_{m_k}|}{V(k)}\right) d\mu}{\|f_{m_k}\|_{H_p}} \geq c m_k \to \infty, \quad \text{როცა} \quad k \to \infty,$$

და ბ) ნაწილიც დამტკიცებულია, რაც ასრულებს თეორემის დამტკიცებას. ■

შემდეგი თეორემა (იხ. თეორემა 2.25) დამტკიცებულია [6]-ში:

თეორემა 2.25. *ა) ვთქვათ $0 < p < 1$ და $\{\varphi_k\}$ არის ნებისმიერი არაკლებადი და არაუარყოფითი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (2.1.16) პირობას. მაშინ მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_p(G)$, ისეთი, რომ*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \frac{S_{\alpha_k} f}{\varphi_{\alpha_k}} \right\|_{L_{p,\infty}} = \infty.$$

ბ) ვთქვათ $0 < p < 1$ და $\{\alpha_k, \ k \geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა და

$$\{\alpha_{s_i}, \ 1 \leq i \leq r\} \subset \{\alpha_k, \ k \geq 0\}$$

ისეთია, რომ

$$2^s \leq \alpha_{s_1} \leq \alpha_{s_2} \leq \cdots \leq \alpha_{s_r} \leq 2^{s+1}, \ s \in \mathbb{N}$$

მაშინ, ნებისმიერი არაუარყოფითი, არაკლებადი $\{\varphi_k\}$ მიმდევრობისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას (2.1.19), მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_p(G)$, ისეთი, რომ მაქსიმალური ოპერატორი, რომელიც განმარტებულია ტოლობით

$$\sup_{s\in\mathbb{N}} \sup_{2^s \leq \alpha_{s_i} < 2^{s+1}} \frac{\left|S_{\alpha_{s_i}} f\right|}{\varphi_{\alpha_{s_i}}}$$

არ არის შემოსაზღვრული მარტინგალური ჰარდის სივრციდან $H_p(G)$ ლებეგის $L_p(G)$ სივრცეში.

გ) ვთქვათ $0 < p < 1$, $\{\alpha_k, \ k \geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა და $\{\varphi_k\}$ არის ნებისმიერი არაუარყოფითი, არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (2.1.18) პირობას. მაშინ მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_p(G)$, ისეთი, რომ მაქსიმალური ოპერატორი, რომელიც განმარტებულია ტოლობით

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_{\alpha_k} f|}{2^{\rho(\alpha_k)(1/p-2)} \varphi_{\rho(\alpha_k)}}$$

არ არის შემოსაზღვრული მარტინგალური ჰარდის სივრციდან $H_p(G)$ ლებეგის $L_p(G)$ სივრცეში.

დამტკიცება. პირობა (2.1.16)-ის გათვალისწინებით, არსებობს ნატურალური რიცხვების მიმდევრობა $\{m_k, \ \ k \geq 0\}$, ისეთი, რომ

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^{\rho(m_k)(1/p-1)}}{\varphi_{m_k}} = \infty, \tag{2.2.41}$$

და სრულდება პირობა

$$\sum_{\eta=0}^{\infty}\left(\varphi_{m_k}^{1/2}/2^{\rho(m_k)(1/p-1)/2}\right)^p<c_p<\infty, \tag{2.2.42}$$

მეორეს მხრივ, თუ სრულდება (2.1.19) პირობა, არსებობს ნატურალური რიცხვების მიმდევრობა

$$\{m_k,\ k\geq 0\}\subset\bigcup_{s=0}^{\infty}\{m_{s_i},\ i\geq 0\},$$

ისეთი, რომ

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2^{\rho(m_k)(1/p-1)}}{\varphi_{m_k}}=\infty \tag{2.2.43}$$

და სრულდება პირობა

$$\sum_{\eta=0}^{\infty}\left(\varphi_{m_k}^{1/2}/2^{\rho(m_k)(1/p-1)/2}\right)^p<c_p<\infty, \tag{2.2.44}$$

რადგანაც (2.2.41) და (2.2.43) იდენტური გამოსახულებებია, ასევე იდენტური გამოსახულებებია (2.2.42) და (2.2.44), ამიტომ ეს საშუალებას გვაძლევს თეორემის ა) და ბ) ნაწილები ერთდროულად დავამტკიცოთ.

ვთქვათ

$$\{m_k,\ k\geq 0\}\subset\{\alpha_k,\ k\geq 0\}$$

ისეთია, რომ $m_0\geq 3$ და

$$\sum_{\eta=0}^{\infty}u^{-p}(m_\eta)<c_p<\infty, \tag{2.2.45}$$

სადაც

$$u(m_k)=2^{\rho(m_k)(1/p-1)/2}/\varphi_{m_k}^{1/2}.$$

განვმარტოთ შემდეგი მარტინგალი

$$f^{(A)}=\sum_{\{k,\ |m_k|<A\}}a_k^p/u(m_k),$$

სადაც

$$a_k^{(p)}=2^{|m_k|(1/p-1)}\left(D_{2^{|m_k|+1}}-D_{2^{|m_k|}}\right).$$

იმის გათვალისწინებით, რომ სამართლიანია

$$S_{2^A}a_k=\begin{cases}a_k & |m_k|<A,\\ 0 & |m_k|\geq A,\end{cases} \tag{2.2.46}$$

$$\operatorname{supp}(a_k) = I_{|m_k|}, \quad \int_{I_{|m_k|}} a_k d\mu = 0 \tag{2.2.47}$$

და

$$\|a_k\|_\infty \leq 2^{|m_k|/p} = \mu(\operatorname{supp} a_k)^{-1/p}, \tag{2.2.48}$$

თუ გამოვიყენებთ, ლემა 1.4-ს და უტოლობა (2.2.45)-ს დავასკვნით, რომ $f = \left(f^{(1)}, f^{(2)}, \cdots, \right) \in H_p(G)$.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$\widehat{f}(j) = \begin{cases} 2^{|m_k|(1/p-1)}/u\,(m_k)\,, & j \in \left\{2^{|m_k|}, \cdots, 2^{|m_k|+1} - 1\right\},\ k \in \mathbb{N} \\ 0\,, & j \notin \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \left\{2^{|m_k|}, \cdots, 2^{|m_k|+1} - 1\right\}. \end{cases} \tag{2.2.49}$$

ვთქვათ $2^{|m_k|} < j < m_k$. (2.2.49)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} S_j f &= S_{2^{|m_k|}} f + \sum_{v=2^{|m_k|}}^{j-1} \widehat{f}(v) w_v \\ &= S_{2^{|m_k|}} f + \left(D_j - D_{2^{|m_k|}}\right) 2^{(|m_k+[m_k])|(1/p-1)/2} \varphi_{m_k}^{1/2} \end{aligned} \tag{2.2.50}$$

და

$$\begin{aligned} \frac{S_j f}{\varphi_{m_k}} &= \frac{S_{2^{|m_k|}} f}{\varphi_{m_k}} + \frac{\left(D_j - D_{2^{|m_k|}}\right) 2^{(|m_k|+[m_k])(1/p-1)/2}}{\varphi_{m_k}^{1/2}} \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{2.2.51}$$

ვთქვათ $m_k \in \mathbb{N}$ და

$$x \in E_{[m_k]} := I_{[m_k]+1}\left(e_{[m_k]}\right).$$

რადგან

$$[m_k] \neq |m_k|\,, \quad \left[m_k - 2^{|m_k|}\right] = [m_k]\,,$$

ამიტომ ლემა 1.2-ის დახმარებით I_2-თვის მივიღებთ

$$\begin{aligned} |I_2| &= \frac{2^{(|m_k|+[m_k])(1/p-1)/2}}{\varphi_{m_k}^{1/2}} \left|D_{m_k - 2^{|m_k|}}\right| \\ &= \frac{2^{(|m_k|+[m_k])(1/p-1)/2}}{\varphi_{m_k}^{1/2}} \left|D_{2^{[m_k]}}\right| \\ &\geq \frac{2^{|m_k|(1/p-1)/2} 2^{[m_k](1/p+1)/2}}{\varphi_{m_k}^{1/2}}. \end{aligned}$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\|I_2\|_{L_{p,\infty}}^p \tag{2.2.52}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \left(\frac{2^{|m_k|(1/p-1)/2}2^{[m_k](1/p+1)/2}}{\varphi_{m_k}^{1/2}}\right)^p \mu\left\{x\in G:\ |I_2|\geq \frac{2^{|m_k|(1/p-1)/2}2^{[m_k](1/p+1)/2}}{\varphi_{m_k}^{1/2}}\right\}\\
&\geq c_p\left(2^{|m_k|(1-p)/2}2^{[m_k](1+p)/2}/\varphi_{m_k}^{p/2}\right)\mu\left(E_{m_k}\right)\\
&\geq c_p2^{|m_k|(1-p)/2}2^{[m_k](p-1)/2}/\varphi_{m_k}^{p/2}\\
&= c_p2^{(|m_k|-[m_k])(1-p)/2}/\varphi_{m_k}^{p/2}\\
&= c_p\left(2^{\rho(m_k)(1/p-1)}/\varphi_{m_k}\right)^{p/2}\to\infty,\ \text{როცა}\ \ k\to\infty.
\end{aligned}$$

თუ გამოვიყენებთ (2.2.52)-ს და კარგად ცნობილ უტოლობას (იხ. [71])

$$\|S_{2^n}f\|_{L_{p,\infty}}\leq c_p\|f\|_{H_p},\ \ \text{სადაც}\ \ f\in H_p,$$

მივიღებთ

$$\|I_1\|_{L_{p,\infty}}\leq c_p<\infty$$

და

$$\|S_{m_k}f\|_{L_{p,\infty}}^p\geq\|I_2\|_{L_{p,\infty}}^p-\|I_1\|_{L_{p,\infty}}^p\to\infty,\ \ \text{როცა}\ \ k\to\infty,$$

რაც ასრულებს თეორემის ა) და ბ) ნაწილების დამტკიცებას.

ახლა, დავამტკიცოთ გ) ნაწილი. ვთქვათ $\{m_k,\ k\geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ისეთი ქვემიმდევრობა, რომ $m_0\geq 3$ და

$$\sum_{\eta=0}^{m_k}u_{m_\eta}^{-p}<c_p<\infty, \tag{2.2.53}$$

სადაც

$$u_{m_k}=\left(\sum_{n=1}^{m_k}\frac{1}{\varphi_n^p}\right)^{1/2}.$$

განვმარტოთ შემდეგი მარტინგალი

$$f^{(A)}=\sum_{\{k;\ |m_k|<A\}}a_k^p/u_{m_k},$$

სადაც

$$a_k^{(p)}=2^{|m_k|(1/p-1)}\left(D_{2^{|m_k|+1}}-D_{2^{|m_k|}}\right).$$

თუ გავიმეორებთ (2.2.46)-ის, (2.2.47)-ის და (2.2.48)-ის ანალოგიურ გადასვლებს და გამოვიყენებთ ლემა 1.1-ს და (2.2.53) უტოლობა, მაშინ ადვილად დავასკვნით, რომ $f=\left(f^{(1)},f^{(2)},\cdots,\right)\in H_p(G)$.

ვთქვათ $q_{m_k}^s\in\mathbb{N}$ არის ნატურალური რიცხვების ისეთი მიმდევრობა, რომ სრულდება

$$2^{|m_k|}\leq q_{m_k}^s\leq 2^{|m_k|+1}\quad \text{და}\quad [q_{m_k}^s]=s,\ \text{სადაც}\ 0\leq s<|m_k|.$$

თუ გავიმეორებთ (2.2.49)-ის, (2.2.50)-ის და (2.2.51)-ის ანალოგიურ გადასვლებს, მაშინ ადვილად მივიღებთ

$$\begin{aligned} &\frac{S_{q_{m_k}^s}f}{2^{(1/p-1)\rho\left(q_{m_k}^s\right)}\varphi_{\rho\left(q_{m_k}^s\right)}} \\ =\ &\frac{S_{2^{|m_k|}}f}{2^{(1/p-2)\rho\left(q_{m_k}^s\right)}\varphi_{\rho\left(q_{m_k}^s\right)}} \\ +\ &\frac{2^{|m_k|(1/p-1)}}{2^{(1/p-1)\rho\left(q_{m_k}^s\right)}\varphi_{\rho\left(q_{m_k}^s\right)}u_{m_k}}\left(D_{q_{m_k}^s}-D_{2^{|m_k|}}\right) \\ =:\ &II_1+II_2. \end{aligned} \tag{2.2.54}$$

ვთქვათ

$$x\in E_s:=I_{s+1}\left(e_{s-1}+e_s\right).$$

თუ გამოვიყენებთ ლემა 1.2-ს გვექნება შემდეგი ქვემოდან შეფასება

$$\begin{aligned} |II_2| &= \frac{2^{|m_k|(1/p-1)}}{2^{(1/p-1)\rho\left(q_{m_k}^s\right)}\varphi_{\rho\left(q_{m_k}^s\right)}u_{m_k}}\left|D_{q_{m_k}^s-2^{|m_k|}}\right| \\ &\geq \frac{2^{s(1/p-1)}}{\varphi_{\rho\left(q_{m_k}^s\right)}u_{m_k}}\left|D_{2^s}\right| \\ &\geq \frac{2^{s/p}}{\varphi_{m_k-s}u_{m_k}}. \end{aligned}$$

აქედან,

$$\begin{aligned} \int_G |II_3|^p\,d\mu &\geq \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n_k-1}\int_{I_{s+1}(e_{s-1}+e_s)}|II_3|^p\,d\mu \\ &\geq c_p\sum_{s=0}^{n_k-1}\frac{1}{2^s}\frac{2^s}{\varphi_{n_k-s}^p u_{m_k}^p} \end{aligned} \tag{2.2.55}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{c_p}{u_{m_k}^p}\sum_{s=1}^{n_k}\frac{1}{\varphi_s^p} \\
&= \left(\sum_{s=1}^{n_k}\frac{1}{\varphi_s^p}\right)^{1-p/2} \\
&\geq \left(\sum_{s=1}^{n_k}\frac{1}{\varphi_s^p}\right)^{1/2} \to \infty, \text{ როცა } k \to \infty.
\end{aligned}
$$

თუ გამოვიყენებთ (2.2.54)-ს და (2.2.55)-ს და შემდეგ ცნობილ უტოლობას (იხ. [71])

$$
\|S_{2^k} f\|_p \leq c_p \|f\|_{H_p}, \text{ სადაც } f \in H_p,
$$

მაშინ მივიღებთ

$$
\|II_1\|_p \leq c_p < \infty
$$

და

$$
\|S_{m_k} f\|_p^p \geq \|II_2\|_p^p - \|II_1\|_p^p \to \infty, \text{ როცა } k \to \infty.
$$

რაც ასრულებს გ) ნაწილის და შესაბამისად, მთლიანი თეორემის დამტკიცებას. ■

3 ჰარდის მარტინგალური სივრცეები და უოლშ-ფურიეს მწკრივე-ბის ნორლუნდის საშუალოები

3.1 ზოგიერთი კლასიკური შედეგი უოლშ-ფურიეს მწკრივების ნორლუნდის სა-შუალოებისთვის

იანომ [107] დაამკიცა, რომ

$$\|K_n\| \leq 2 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

შესაბამისად, ნებისმიერი $f \in L_p$, სადაც $1 \leq p < \infty$,

$$\|\sigma_k f - f\|_p \to 0, \quad \text{როცა} \quad k \to \infty.$$

ფრიდლიმ [32]-ში უწყვეტობის მოდულების დახმარებით შეისწავლა უოლშ-ფეიერის საშუალო-ების კრებადობის სიჩქარე $L_p(G)$ სივრცეში. ასევე ცნობილია, რომ (იხ. წიგნი [3] და [71]) ნებისმიერი $1 \leq p < \infty$-თვის და ნებისმიერი $2^N \leq n < 2^{N+1}$-თვის ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას

$$\|\sigma_n f - f\|_p \leq c_p \omega_p \left(\frac{1}{2^N}, f\right) + c_p \sum_{s=0}^{N-1} \frac{2^s}{2^n} \omega_p \left(\frac{1}{2^s}, f\right).$$

ინტეგრებადი $f \in L_1(G)$ ფუნქციებისთვის ფეიერის საშუალოების σ^* მაქსიმალური ოპერატორის სუსტი $(1,1)$ ტიპის უტოლობა ტრიგონომეტრიული მწკრივებისთვის დამტკიცებულია ზიგმუნდის [111] წიგნში, შიპმა [70] აჩვენა იგივე უტოლობა უოლშის სისტემისთვის.

ფუჯიმ [34] და შიმონმა [74] დაამტკიცეს, რომ σ^* არის (H_1, L_1) ტიპის. ვეისმა [104] დაამტკიცა, რომ σ^* არის ძლიერი (H_p, L_p) ტიპის, როცა $p > 1/2$. შიმონმა [75] დაამტკიცა, რომ შემოსაზღვრულობას არ აქვს ადგილი, როცა $0 < p < 1/2$, ხოლო გოგინავამ [39] აჩვენა ანალოგიური უარყოფითი $p = 1/2$-სთვისაც. ტეფნაძემ [84] დაამტკიცა, რომ მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_{1/2}$ ისეთი, რომ

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\sigma_k f\|_{1/2} = \infty.$$

უფრო მეტიც, მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_p(G)$, როცა $0 < p < 1/2$ ისეთი, რომ

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\sigma_k f\|_{L_{p,\infty}} = \infty.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ σ^* არ არის ძლიერი $(H_{1/2}, L_{1/2})$ ტიპის და სუსტი (H_p, L_p) ტიპის, როცა $0 < p < 1/2$. მიუხედავად ამისა, ვეისმა [105]-ში დაამტკიცა, რომ ფეიერის საშუალოების σ^* მაქსიმა-ლური ოპერატორი არის სუსტი $(H_{1/2}, L_{1/2})$ ტიპის.

ვეისმა [103]-ში დამტკიცდა, რომ თუ $p > 1/2$ და $f \in H_p(G)$, მაშინ სამართლიანია უტოლობა

$$\|\sigma_k f\|_{H_p} \leq c_p \|f\|_{H_p}.$$

ვეისმა ასევე დაამტკიცა, (იხ. წიგნები [102]) რომ თუ $p > 0$ და $f \in H_p(G)$, მაშინ

$$\|\sigma_{2^k} f - f\|_{H_p} \to 0, \quad \text{როცა} \quad k \to \infty. \tag{3.1.1}$$

მეორე მხრივ, ტეფნაძემ [85]-ში დაამტკიცა, რომ მოიძებნება ისეთი $f \in H_p(G)\,(0 < p \leq 1/2)$, რომ

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\sigma_{2^k+1} f\|_{H_p} = \infty.$$

გოგინავამ [41]-ში დაამტკიცა, რომ თუ $0 < p \leq 1$, მაშინ ოპერატორი $|\sigma_{2^k} f|$ არ არის (H_p, L_p) ტიპის.

[63]-ში ტეფნაძემ აჩვენა, რომ თუ $0 < p < 1/2$ და $f \in H_p(G)$, მაშინ მოიძებნება მუდმივი c_p, ისეთი, რომ სამართლიანია უტოლობა

$$\|\sigma_{m_k} f\|_{H_p} \leq c_p \|f\|_{H_p},$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც დაკმაყოფილებულია (2.1.6) პირობა.

ამ უტოლობიდან ვღებულობთ, რომ თუ $p > 0$ და $f \in H_p(G)$, მაშინ მოიძებნება ისეთი მუდმივი c_p, ისეთი რომ

$$\|\sigma_{2^k} f\|_{H_p} \leq c_p \|f\|_{H_p}$$

და

$$\|\sigma_{2^k+2^{k-1}} f\|_{H_p} \leq c_p \|f\|_{H_p}.$$

მეორეს მხრივ, გვაქვს, რომ თუ $p > 0$, მაშინ მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_p(G)$, ისეთი რომ

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\sigma_{2^k+1} f\|_{H_p} = \infty.$$

[89]-ში დამტკიცდა, რომ თუ $k \in \mathbb{N}_+$ და $f \in H_{1/2}(G)$, მაშინ არსებობს მუდმივი c, ისეთი, რომ

$$\|\sigma_k f\|_{H_{1/2}} \leq c V^2(k) \|f\|_{H_{1/2}}. \tag{3.1.2}$$

უფრო მეტიც, თუ $\{m_k : \ k \geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} V(m_k) = \infty$$

და $\{\varphi_k\}$ არის არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{V^2(m_k)}{\varphi_{m_k}} = \infty,$$

მაშინ მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_{1/2}(G)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|\frac{\sigma_{m_k}f}{\varphi_{m_k}}\right\|_{1/2}=\infty.$$

[89]-ში (იხ. აგრეთვე [65]) ტეფნაძემ აჩვენა, რომ თუ $0<p<1/2$ და $f\in H_p(G)$, მაშინ არსებობს მუდმივი c_p, ისეთი, რომ

$$\|\sigma_k f\|_{H_p}\le c_p 2^{\rho(k)(1/p-2)}\|f\|_{H_p}. \tag{3.1.3}$$

უფრო მეტიც, $2^{\rho(k)(1/p-2)}$ მიმდევრობის რიგი არის განუზოგადებელი იგივე აზრით, როგორ ეს მოყვანილია $p=1/2$ შემთვევისთვის.

როცა $0<p<1/2$, ტეფნაძემ [63]-ში დაამტკიცა, რომ ნებისმიერი $0<p<1/2$-თვის და $f\in H_p(G)$ მარტინგალისთვის, მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{\sigma}^{*}f:=\sup_{k\in\mathbb{N}}|\sigma_{m_k}f|$$

შემოსაზღვრულია $H_p(G)$-დან $L_p(G)$-ში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა დაკმაყოფილებულია (2.1.6) პირობა. კერძოდ, აქედან მიიღება, რომ ნებისმიერი $p>0$-თვის შეზღუდული მაქსიმალური ოპერატორები

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}|\sigma_{2^k}f| \quad \text{და} \quad \sup_{k\in\mathbb{N}}|\sigma_{2^k+2^{k-1}}f|$$

არიან (H_p,L_p) ტიპის, ხოლო $|\sigma_{2^k+1}f|$ მაქსიმალური ოპერატორი არ არის (H_p,L_p) ტიპის არცერთი $p>0$-თვის, როცა $0<p<1/2$.

[40]-ში $p=1/2$-თვის და [85]-ში $0<p\le 1/2$-თვის დამტკიცდა, რომ თუ $f\in H_p(G)$, მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{\sigma}_p^{*}f:=\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{|\sigma_k f|}{(k+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(k+1)}$$

არის ძლიერი $(H_{1/2},L_{1/2})$ ტიპის. მეტიც, ნებისმიერი არაკლებადი $\{\varphi_k\}$ მიმდევრობისთვის, რომელსთვისაც სამართლიანია შემდეგი პირობა

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{(k+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(k+1)}{\varphi_k}=\infty,$$

მაშინ მოძებნება მარტინგალი $f\in H_p(G)$, $(0<p<1/2)$ ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|\frac{\sigma_k f}{\varphi_k}\right\|_p=\infty,$$

ფეიერის საშუალოების წონიანი მაქსიმალური ოპერატორების შესახებ მოყვანილი უარყოფითი შედეგიდან მიიღება, რომ მოიძებნება მარტინგალი $f\in H_p(G)$ $(0<p\le 1/2)$, ისეთი რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\|\sigma_k f\|_p=\infty,$$

ხოლო დადებითი შედეგიდან მივიღებთ, რომ ნებისმიერი $f\in H_p(G)$ მარტინგალისთვის სამართლიანია

შემდეგი შეფასება:

$$\|\sigma_k f\|_p \leq c_p k^{1/p-2} \log^{2[1/2+p]}(k+1) \|f\|_{H_p}, \text{ როცა } 0 < p \leq 1/2. \tag{3.1.4}$$

(3.1.4) უტოლობის გამოყენებით, $f \in H_p(G)$ მარტინგალის უწყვეტობის მოდულებისთვის ტეფნაძემ [86]-ში იპოვა ისეთი აუცილებელი და საკმარისი პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ფეიერის საშუალოების კრებადობას $H_p(G)$-ში. კერძოდ, თუ $0 < p \leq 1/2$, $f \in H_p(G)$ და

$$\omega_{H_p}\left(\frac{1}{2^k}, f\right) = o\left(\frac{1}{2^{k(1/p-2)}k^{2[1/2+p]}}\right), \text{ როცა } k \to \infty,$$

მაშინ

$$\|\sigma_k f - f\|_p \to 0, \quad \text{როცა} \quad k \to \infty.$$

უფრო მეტიც, მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_p(G)$, რომლისთვისაც

$$\omega_{H_{1/2}}\left(\frac{1}{2^k}, f\right) = O\left(\frac{1}{2^{k(1/p-2)}k^{2[1/2+p]}}\right), \text{ როცა } k \to \infty$$

და

$$\|\sigma_k f - f\|_p \nrightarrow 0, \text{ როცა } k \to \infty.$$

უტოლობა (3.1.2)-ის გამოყენებით $p = 1/2$-თვის ტეფნაძემ [89]-ში დაამტკიცა, რომ თუ $f \in H_{1/2}(G)$ და $\{m_k : k \geq 0\}$ ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობაა, რომლისთვისაც სრულდება

$$\omega_{H_{1/2}}\left(\frac{1}{2^{|m_k|}}, f\right) = o\left(\frac{1}{V^2(m_k)}\right) \text{ როცა } k \to \infty,$$

მაშინ

$$\|\sigma_{m_k} f - f\|_{H_{1/2}} \to 0 \text{ როცა } k \to \infty.$$

უფრო მეტიც, თუ $\{m_k : k \geq 0\}$ ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობაა, რომლისთვისაც სამართლიანია (2.1.8) პირობა, მაშინ მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_{1/2}(G)$ და ქვემიმდევრობა

$$\{\alpha_k : k \geq 0\} \subset \{m_k : k \geq 0\}$$

რომლისთვისაც

$$\omega_{H_{1/2}}\left(\frac{1}{2^{|\alpha_k|}}, f\right) = O\left(\frac{1}{V^2(\alpha_k)}\right) \text{ როცა } k \to \infty$$

და

$$\limsup_{k\to\infty} \|\sigma_{\alpha_k} f - f\|_{1/2} > c > 0 \text{ როცა } k \to \infty,$$

სადაც c აბსოლუტური მუდმივია.

უტოლობა (3.1.3)-ის გამოყენებით [89]-ში (იხ. აგრეთვე [99]) ასევე განხილული იქნა $0<p<1/2$ შემთხვევა და დამტკიცდა, რომ თუ $f\in H_p(G)$ და $\{m_k : k\geq 0\}$ ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობაა, რომლისთვისაც

$$\omega_{H_p}\left(\frac{1}{2^{|m_k|}},f\right)=o\left(\frac{1}{2^{\rho(m_k)(1/p-2)}}\right),\ \text{როცა}\ k\to\infty, \tag{3.1.5}$$

მაშინ

$$\|\sigma_{m_k}f-f\|_{H_p(G)}\to 0\ \text{ როცა }\ k\to\infty.$$

უფრო მეტიც, (3.1.5) პირობა არის განუზოგადობელი იგივე აზრით, როგორ ეს მოყვანილია $p=1/2$-თვის.

როცა $0<p<1/2$, [16]-ში დამტკიცდა, რომ წონიან მაქსიმალურ ოპერატორს

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{|\sigma_k f|}{2^{\rho(k)(1/p-2)}} \tag{3.1.6}$$

აქვს სუსტი (H_p,L_p) ტიპი. მეორეს მხრივ, [7] და [16]-ში ასევე დამტკიცდა, რომ თუ $0<p<1/2$, $\{m_k:\ k\geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\rho\left(m_k\right)=\infty$$

და $\{\varphi_k\}$ არის არაკლებადი და არაუარყოფითი მიმდევრობა, რომლისთვისაც სრულდება პირობა

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{2^{\rho(m_k)(1/p-2)}}{\varphi_{m_k}}=\infty, \tag{3.1.7}$$

მაშინ მოიძებნება მარტინგალი $f\in H_p(G)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|\frac{\sigma_{m_k}f}{\varphi_{m_k}}\right\|_{L_{p,\infty}}=\infty.$$

[8]-ში დამტკიცდა, რომ თუ $0<p<1/2$, $f\in H_p\left(G\right)$ და $\varphi:\mathbb{N}_+\to\mathbb{R}_+$ არის ნებისმიერი არაუარყოფითი და არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi_n^p}<c<\infty,$$

მაშინ, წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}$, რომელიც განიმარტება ტოლობით

$$\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}f=\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{|\sigma_k f|}{2^{\rho(k)(1/p-2)}\varphi_{\rho(k)}}, \tag{3.1.8}$$

არის ძლიერი (H_p,L_p) ტიპის. უფრო მეტიც, [7] და [8]-ში, ასევე ნაჩვენები იქნა, რომ თუ $0<p<1/2$, $\{m_k:k\geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა და $\varphi:\mathbb{N}_+\to\mathbb{R}_+$ არის ნებისმიერი არაკლებადი, არაუარყოფითი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi_n^p}=\infty, \tag{3.1.9}$$

მაშინ მოიძებნება მარტინგალი $f\in H_p(G)$, ისეთი, რომ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}$, რომელიც განმარტებულია (2.1.17) ტოლობით, არ არის ძლიერი (H_p,L_p) ტიპის.

აქედან, კერძოდ მივიღებთ რომ, თუ $0<p<1/2$ და $f\in H_p(G)$, მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{\sigma}^{*,\nabla,\varepsilon}$, რომელიც განმარტებულია შემდეგნაირად

$$\widetilde{\sigma}^{*,\nabla,\varepsilon}f:=\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{|\sigma_k f|}{2^{\rho(k)(1/p-2)}\left(\rho\left(k\right)\log^{1+\varepsilon}\rho\left(k\right)\right)^{1/p}},\quad \varepsilon\geq 0,$$

შემოსაზღვრულია ჰარდის მარტინგალური $H_p(G)$ სივრციდან ლებეგის $L_p(G)$ სივრცეში, როცა $\varepsilon>0$ და არაა შემოსაზღვრული $H_p(G)$ სივრციდან ლებეგის $L_p(G)$ სივრცეში, როცა $\varepsilon=0$.

[11]-ში დამტკიცებულია, რომ თუ $0<p<1/2$, $f\in H_p$, $\{m_k:k\geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა და

$$\{m_{s_i}:\ 1\leq i\leq r\}\subset\{m_k:\ k\geq 0\}$$

არის ისეთი ქვემიმდევრობები, რომლისთვისაც სრულდება

$$2^s\leq m_{s_1}\leq m_{s_2}\leq...\leq m_{s_r}\leq 2^{s+1},\ s\in\mathbb{N},$$

მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{S}^{*,\nabla}$, რომელიც განმარტებულია შემდეგნაირად

$$\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}f:=\sup_{s\in\mathbb{N}}\sup_{2^s\leq m_{s_i}<2^{s+1}}\frac{\left|\sigma_{m_{s_i}}f\right|}{2^{\rho_s\left(m_{s_i}\right)(1/p-2)}},$$

სადაც $\rho_s\left(m_{s_i}\right)$ განიმარტება (1.2.1) ტოლობით, არის ძლიერი (H_p,L_p) ტიპის. უფრო მეტიც, [7]-ში და [11]-ში, ასვე ნაჩვენები იქნა, რომ თუ $0<p<1/2$, $\{m_k:k\geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა და

$$\{m_{s_i}:\ 1\leq i\leq r\}\subset\{m_k:\ k\geq 0\}$$

არის ისეთი ქვემიმდევრობა, რომლებისთვისაც სრულდება

$$2^s\leq m_{s_1}\leq m_{s_2}\leq...\leq m_{s_r}\leq 2^{s+1},\ s\in\mathbb{N},$$

მაშინ, ნებისმიერი არაკლებადი, არაუარყოფითი მიმდევრობისთვის $\varphi:\mathbb{N}_+\to\mathbb{R}$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\sup_{s\in\mathbb{N}}\sup_{2^s\leq m_{s_i}<2^{s+1}}\frac{2^{\rho_s\left(m_{s_i}\right)(1/p-2)}}{\varphi_{m_{s_i}}}=\infty, \tag{3.1.10}$$

მაშინ, მაქსიმალური ოპერატორი, რომელიც განიმარტება ტოლობით

$$\sup_{s\in\mathbb{N}}\sup_{2^s\leq m_{s_i}<2^{s+1}}\frac{\left|\sigma_{m_{s_i}}f\right|}{\varphi_{m_{s_i}}},\tag{3.1.11}$$

არ არის ძლიერი (H_p,L_p) ტიპის.

[9]-ში დამტკიცდა, რომ თუ $f\in H_{1/2}\left(G\right)$ და $\{m_k:k\geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა და ვთქვათ

$$\{m_{s_i}:\ 1\leq i\leq r\}\subset\{m_k:\ k\geq 0\}$$

არის ისეთი, რომ

$$2^s\leq m_{s_1}\leq n_{s_2}\leq ...\leq m_{s_r}\leq 2^{s+1},\ s\in\mathbb{N}.$$

თუ A_s სიმრავლეები, რომელიც განმარტებულია (1.2.2)-ით, არიან ერთობლივ შემოსაზღვრულები $s\in\mathbb{N}$-ის მიმართ, რაც ნიშნავს, რომ A_s სიმრავლის კარდინალური რიცხვების სიმრავლე არის შემოსაზღვრული:

$$\sup_{s\in\mathbb{N}}|A_s|<c<\infty,$$

მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}$, რომელიც განმარტებულია ტოლობით

$$\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}f=\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sigma_{m_k}f\right|,\tag{3.1.12}$$

არის ძლიერი $(H_{1/2},L_{1/2})$ ტიპის. უფრო მეტიც, თუ

$$\sup_{s\in\mathbb{N}}|A_s|=\infty,$$

მაშინ მოიძებნება მარტინგალი$f\in H_{1/2}\left(G\right)$, ისეთი, რომ მაქსიმალური ოპერატორი (2.2.1) არ არის ძლიერი $(H_{1/2},L_{1/2})$ ტიპის.

ამ თეორემიდან დაუყოვნებლივ მივიღებთ, რომ თუ $f\in H_{1/2}\left(G\right)$ და $\{m_k:k\geq 0\}$ არის ზრდადი დადებითი რიცხვების მიმდევრობა, მაშინ შეზღუდული მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}$, რომელიც განიმარტება (2.2.1) ტოლობით, არის ძლიერი $(H_{1/2},L_{1/2})$ ტიპის, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა დადებითი რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა $\{m_k:k\geq 0\}$, რომლებიც აკმაყოფილებენ $m_k\in[2^s,2^{s+1})$ პირობას, არიან სასრული რაოდენობის ნებისმიერი $s\in\mathbb{N}_+$-თვის და ყოველ $\{m_k:k\geq 0\}$-ს აქვს სასრული ვარიაცია

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}V(m_k)<c<\infty.$$

[1]-ში ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ თუ $f\in H_{1/2}(G)$ და $\{m_k:k\geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა. მაშინ, წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}$, რომელიც განმარტებულია ტოლობით

$$\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}f:=\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{|\sigma_{m_k}f|}{\left|A_{|m_k|}\right|^2},$$

არის ძლიერი $(H_{1/2}, L_{1/2})$ ტიპის. უფრო მეტიც, [1]-ში ასევე დამტკიცდა, რომ თუ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}|A_{m_k}| = \infty$$

და $\{\varphi_n\}$ არის ისეთი არაუარყოფითი, არაკლებადი მიმდევრობა

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\left|A_{|m_k|}\right|^2}{\varphi_{|m_k|}} = \infty.$$

მაშინ მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_{1/2}(G)$, ისეთი რომ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{|\sigma_{m_k} f|}{\varphi_{|m_k|}}$$

არ არის ძლიერი $(H_{1/2}, L_{1/2})$ ტიპის.

ვეისმა [101]-ში (იხ. [76]) დამტკიცა, რომ უოლშის სისტემების მიმართ ჩეზაროს საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი $\sigma^{\alpha,*}$ $(0 < \alpha < 1)$ არის ძლიერი (H_p, L_p) ტიპის, როცა $p > 1/(1+\alpha)$. გოგინავამ [38]-ში აჩვენა, რომ შემოსაზღვრულობა არაა სამართლიანი, როცა $0 < p \le 1/(1+\alpha)$. ვეისმა და შიმონმა [76]-ში დაამტკიცეს, რომ მაქსიმალური ოპერატორი $\sigma^{\alpha,*}$ არის სუსტი (H_p, L_p) ტიპის.

(C, α) საშუალოების ძლიერად შეჯამებადობა და მათი წონიანი მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობა შესწავლილია ბლახოტას და ტეფნაძის [23] და ბლახოტას, ტეფნაძეს და ტოლედოს [24] და ბლახოტას, ნოჯის და ტეფნაძის [22] მიერ. კერძოდ, [23] და [24] დამტკიცდა, რომ თუ $f \in H_p(G)$, სადაც $0 < p \le 1/(1+\alpha)$ $0 < \alpha \le 1$, მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{\sigma}^*_{p,\alpha} := \sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{|\sigma^\alpha_k f|}{(k+1)^{1/p-1-\alpha}\log^{(1+\alpha)[\alpha/(1+\alpha)+p]}(k+1)}$$

არის (H_p, L_p) ტიპის. უფრო მეტიც,

$$\left\{(k+1)^{1/p-1-\alpha}\log^{(1+\alpha)[\alpha/(1+\alpha)+p]}(k+1),\ k\in\mathbb{N}\right\}$$

მიმდევრობის განშლადობის რიგი უსასრულობაში არის განუზოგადებელი ისეთივე აზრით, როგორც ეს მოყვანილია ფეირის საშუალოს შემთხვევაში.

[36]-ში გატმა და გოგინავამ დაამტკიცეს, რომ არსებობს ინტეგრირებადი f ფუნქცია და დადებითი ზომის სიმრავლე ისეთი, ისეთი, რომ f ფუნქციის უოლშ-ფურიეს მწკრივის ლოგარითმული საშუალოები არაა კრებადი ამ სიმრავლეზე. აქედან მივიღებთ, რომ ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების

$$L^* f := \sup_{k\in\mathbb{N}}|L_k f|$$

მაქსიმალური ოპერატორს არ აქვს სუსტი $(1,1)$ ტიპი. მეორეს მხრივ, (იხ. [10] და [69]) L^* არის ძლიერი (p,p) ტიპის, როცა $p > 1$. უფრო მეტიც, თუ განვიხილავთ შემდეგ შეზღუდულ მაქსიმალურ ოპერატორს

$$\widetilde{L}^*_{\#} f := \sup_{k\in\mathbb{N}}|L_{2^k} f|,$$

მაშინ მას აქვს სუსტი $(1,1)$ ტიპი.

[69]-ში დამტკიცებულია, რომ მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_p(G)$, $(0 < p \leq 1)$ ისეთი, რომ

$$\|L^* f\|_p = \infty.$$

[67]-ში პერსონმა, ტეფნაძემ და ვალმა დაამტკიცეს, რომ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{L}^* f := \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|L_k f|}{\log(k+1)}$$

არის (H_1, L_1) ტიპის. უფრო მეტიც, თუ $\{\varphi_k\}$ არის არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{\log(k+1)}{\varphi_k} = \infty,$$

მაშინ, მაქსიმალური ოპერატორი

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|L_k f|}{\varphi_k}$$

არ არის შემოსაზღვრული ჰარდის (H_1, L_1) ტიპის.

როცა $0 < p < 1$ მემიჩმა [52]-ში დაამტკიცა, რომ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{L}_p^* f := \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{\log(k+1)\,|L_k f|}{(k+1)^{1/p-1}}$$

არის (H_p, L_p) ტიპის.

ტეფნაძემ და თუთბერიძემ [93]-ში დაამტკიცეს, რომ $0 < p < 1$-სთვის და ყოველი არაკლებადი $\{\varphi_k\}$ მიმდევრობისთვის, რომლისთვისაც სრულდება პირობას

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{(k+1)^{1/p-1}}{\log(k+1)\varphi_k} = \infty,$$

მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_p(G)$ ისეთი, რომ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|L_k f|}{\varphi_k}$$

არაა შემოსაზღვრული ჰარდის მარტინგალური $H_p(G)$ სივრციდან ლებეგის $L_p(G)$ სივრცეში.

[43]-ში გოგინავამ და ნოჯიმ (იხ. აგრეთვე [42]) დამტკიცეს, რომ თუ $\{m_A : A \in \mathbb{N}\}$ არის ისეთი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\sup_{A \in \mathbb{N}} \frac{1}{l_{m_A}} \sum_{k=1}^{|m_A|} |(m_A)_k - (m_A)_{k+1}| l_k < c < \infty.$$

მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{L}^{*,\nabla} f := \sup_{A \in \mathbb{N}} |L_{m_A} f|$$

შემოსაზღვრულია მარტინგალური ჰარდის $H_1(G)$ სივრციდან ლებეგის $L_1(G)$ სივრცეში.

უფრო, მეტიც, თუ $\{m_A : A \in \mathbb{N}\}$ არის ისეთი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\sup_{A\in\mathbb{N}} \frac{1}{l_{m_A}} \sum_{k=1}^{|m_A|} |(m_A)_k - (m_A)_{k+1}| l_k = \infty$$

მაშინ ოპერატორები $t_{m_A} f$ არ არიან ერთობლივ შემოსაზღვრულები ჰარდის მარტინგალური $H_1(G)$ სივრციდან ლებეგის $L_1(G)$ სივრცეში.

ამ თეორემის გათვალისწინებით, ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების ქვემიმდევრობების შემოსაზღვრულობის საკითხი სრულად შესწავლილია $p = 1$ შემთხვევაში. პრობლემა ასევე აქტუალურია $0 < p < 1$-თვის. ამ შემთხვევაში ამ თეზისში ჩვენ ვაჩვენებთ (იხ. ასევე [15]), რომ ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების L_{2^k} ქვემიმდევრობა არ არის შემოსაზღვრული ჰარდის მარტინგალური $H_p(G)$ სივრციდან ლებეგის $L_p(G)$ სივრცეში. უფრო დაწვრილებით, თუ $0 < p < 1$, მაშინ მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_p(G)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|L_{2^k} f\|_{L_{p,\infty}} = \infty.$$

რადგან $\{2^k\}$ ქვემიმდევრობას გააჩნია ყველაზე კარგი შემოსაზღვრულობის თვისებები, ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ შემოსაზღვრულობას არ აქვს ადგილი არცერთი ნორლუნდის საშუალოს ქვემიმდევრობისთვის.

მორიჩიმ და სიდიკიმ [55] დაამტკიცეს უოლშ-ფურიეს მწკრივების ნორლუნდის საშუალოების აპროქსიმაციის თვისებები $L_p(G)$ სივრცეში. ფრიდლის, მანჩანდას და სიდიკის მიერ [33]-ში დამტკიცდა მორიჩის და სიდიკის თეორემების ანალოგი მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებში.

[69]-ში დამტკიცდა, რომ თუ $(q_k,\ k \in \mathbb{N})$ არის ნებისმიერი არაუარყოფითი, არაზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს

$$\frac{1}{Q_k} = O\left(\frac{1}{k^{\alpha}}\right), \quad \text{როცა} \quad k \to \infty \tag{3.1.13}$$

და

$$q_k - q_{k+1} = O\left(\frac{1}{k^{2-\alpha}}\right), \quad \text{როცა} \quad k \to \infty, \tag{3.1.14}$$

მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი t^* არის სუსტი $(1,1)$ ტიპის. t^* არის სუსტი $(1,1)$ ტიპის, მაშინაც როცა გვაქვს ნორლუნდის საშუალოები, რომელიც წარმოქმნილია არაზრდადი $(q_k, k \in \mathbb{N})$ მიმდევრობით, რომელიც აკმაყოფილებს შედარებით სუსტ პირობებს

$$\frac{k^{\alpha}}{Q_k} = O(1), \text{ როცა } k \to \infty \tag{3.1.15}$$

და

$$\frac{Q_k}{k^{\alpha+\varepsilon}} \to 0, \text{ როცა } k \to \infty, \text{ სადაც } \varepsilon > 0. \tag{3.1.16}$$

როცა მიმდევრობა $(q_k,\ k\in\mathbb{N})$ არის არაკლებადი, მაშინ სუსტი $(1,1)$ ტიპის უტოლობა სრულდება ნებისმიერი ასეთი ნორლუნდის საშუალოს მაქსიმალური ოპერატორისთვის. ასეთი ნორლუნდის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორები არ არიან ძლიერი $(1,1)$ ტიპის. მიუხედავად ამისა (იხ. [10]), ადგილი აქვს ნორმით კრებადობას $L_p(G)$ სივრცეში:

$$\|t_kf-f\|_p\to 0,\quad \text{როცა}\quad k\to\infty,\ \ (f\in L_p(G),\ \ 1\le p<\infty).$$

პერსონმა, ტეფნაძემ და ვალმა [66]-ში დაამტკიცეს, რომ არაკლებადი $\{q_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ მიმდევრობით წარმოქმნილი ნორლუნდის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი t^* არის სუსტი $(H_{1/2},L_{1/2})$ ტიპის. უფრო მეტიც, ნებისმიერი ისეთი არაკლებადი $\{q_k:k\in\mathbb{N}\}$ მიმდევრობისთვის, რომლისთვისაც

$$\frac{q_0}{Q_k}\ge\frac{c}{k}, \tag{3.1.17}$$

მოიძებნება მარტინგალი $f\in H_p(G)$ $(0<p<1/2)$ ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\|t_kf\|_{L_{p,\infty}}=\infty. \tag{3.1.18}$$

[68]-ში დამტკიცდა, რომ თუ $0<p\le 1/2$ და $\{q_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ მიმდევრობა არაკლებადია, მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{t}_p^*f:=\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{|t_kf|}{(k+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(k+1)}$$

არის ძლიერი (H_p,L_p) ტიპის. რადგანაც, ფეიერის საშუალოები წარმოადგენენ არაკლებადი $\{q_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ მიმდევრობით წარმოქმნილი ნორლუნდის საშუალოების კერძო მაგალითს, ამიტომ მარტივად მივიღებთ, რომ მიმდევრობის

$$\left\{(k+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(k+1),\ k\in\mathbb{N}\right\}$$

განშლადობის რიგი უსასრულობაში არის განუზოგადებელი.

[66]-ში ავტორებმა ასევე დაამტკიცეს, რომ არაზრდადი $\{q_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ მიმდევრობებისთვის მქონე ყოველი ნორლუნდის საშუალოსთვის, მოიძებნება მარტინგალი $f\in H_p(G)$ ისეთი, რომ ადგილი აქვს (3.1.18)-ს. აქედან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი არაზრდადი $\{q_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ მიმდევროებით განსაზღვრული ნორლუნდის t_n საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი t^* არ არის სუსტი (H_p,L_p) ტიპის, როცა $0<p<1/2$.

[66]-ში ასევე დაამტკიცდა, რომ თუ $0<p<1/(1+\alpha)$, სადაც $0<\alpha\le 1$ და $\{q_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ არის არაზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k^\alpha}{Q_k}=c>0,\ 0<\alpha\le 1, \tag{3.1.19}$$

მოიძებნება მარტინგალი $f\in H_p(G)$ ისეთი, რომ ადგილი აქვს (3.1.18)-ს. უფრო მეტიც, ნებისმიერი არაზრდადი $\{q_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ მიმდევრობისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k^{\alpha}}{Q_k}=\infty, \quad (0<\alpha\leq 1), \tag{3.1.20}$$

მოიძებნება მარტინგალი $f\in H_{1/(1+\alpha)}(G)$ ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\|t_kf\|_{L_{1/(1+\alpha),\infty}}=\infty. \tag{3.1.21}$$

[53]-ში მემიჩმა, პერსონმა და ტეფნაძემ დაამტკიცეს, რომ არაზრდადი $\{q_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ მიმდევრობით განსაზღვრული ნორლუნდის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი t^{*}, რომელიც აკმაყოფილებს (3.1.13) და (3.1.14) პირობებს, არ არის სუსტი (H_p,L_p) ტიპის, როცა $0<\alpha\leq 1$. უფრო მეტიც, [38]-ში დამტკიცებულია, რომ თუ

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k^{\alpha}}{Q_k}\geq c_{\alpha}>0 \quad \text{და} \quad |q_k-q_{k+1}|\geq c_{\alpha}k^{\alpha-2},\ \ (0<\alpha\leq 1),\ \ k\in\mathbb{N},$$

მაშინ მოიძებნება მარტინგალი $f\in H_{1/(1+\alpha)}(G)$ ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\|t_kf\|_{1/(1+\alpha)}=\infty.$$

[66]-ში დამტკიცდა რომ, თუ $f\in H_p(G)$, სადაც $0<p\leq 1/(1+\alpha)$ $0<\alpha\leq 1$-თვის და $\{q_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ არის არაზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (3.1.13) და (3.1.14) პირობებს, მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\tilde{t}{}^{*}_{p,\alpha}:=\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{|t_kf|}{(k+1)^{1/p-1-\alpha}\log^{(1+\alpha)[\alpha/(1+\alpha)+p]}(k+1)}$$

არის (H_p,L_p) ტიპის. უფრო მეტიც, არსებობს ნორლუნის საშუალოები არაზრდადი მიმდევრობით, რომელიც აკმაყოფილებს (3.1.13) და (3.1.14) პირობებს, რომლისთვისაც მიმდევრობის

$$\left\{(k+1)^{1/p-1-\alpha}\log^{(1+\alpha)[\alpha/(1+\alpha)+p]}(k+1),\ k\in\mathbb{N}\right\}$$

განშლადობის რიგი უსასრულობაში არის განუზოგადებელი ისეთივე აზრით, როგორც წინა შემთხვევებში.

ნორლუნდის საშუალოების ძლიერად შეჯამებადობის თეორემები დამტკიცებულია ბლახოტას, პერსონის და ტეფნაძის [25] ნაშრომებში. ორგანზომილებინ შემთხვევაში ნორლუნდის საშუალოების აპროქსიმაციული თვისებების ლებეგის და ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებში შესწავლილია ნოჯის [56], ტეფნაძის და ნოჯის [57] შრომებში.

უფრო ზოგად შემთხვევაში, ვილინკინის ორთოგონალური სისტემისთვის ამ ტიპის შედეგები დამტკიცებულია პერსონის, ტეფნაძის და ვეისის [69] წიგნში, რომელიც ყველა მნიშვნელოვან და საინტერესო შედეგს შეიცავს ნორლუნდის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორის და წონიანი მაქსიმალური ოპერატორის შესახებ და ასევე ნორმით კრებადობისა და ძლიერად შეჯამებადობის შესახებ ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებში.

[43]-ში გოგინავამ და ნოჯიმ სრულად შეისწავლეს ნორლუნდის საშუალოების ქვემიმდევრობების შემოსაზღვრულობის საკითხები ჰარდის $H_1(G)$ სივრციდან ლებეგის $L_1(G)$ სივრცეში. უფრო დაწ-

ვრილებით, მათ დამტკიცეს, რომ თუ $\{m_A,\ A\in\mathbb{N}\}$ არის ისეთი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\sup_{A\in\mathbb{N}}\frac{1}{Q_{m_A}}\sum_{k=1}^{|m_A|}|(m_A)_k-(m_A)_{k+1}|Q_k<c<\infty. \tag{3.1.22}$$

მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{t}^{*,\nabla}F:=\sup_{A\in\mathbb{N}}|t_{m_A}F|$$

შემოსაზღვრულია მარტინგალური ჰარდის $H_1(G)$ სივრციდან ლებეგის $L_1(G)$ სივრცეში.

გოგინავამ [42]-ში დაამტკიცა, რომ თუ $\{m_A,\ A\in\mathbb{N}\}$ არის ისეთი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\sup_{A\in\mathbb{N}}\frac{1}{Q_{m_A}}\sum_{k=1}^{|m_A|}|(m_A)_k-(m_A)_{k+1}|Q_k=\infty$$

მაშინ ოპერატორი $t_{m_A}F$ არ არიან ერთობლივ შემოსაზღვრულები მარტინგალური ჰარდის $H_1(G)$ სივრციდან ლებეგის $L_1(G)$ სივრცეში.

ვთქვათ $\{q_k\}$ არის არაზრდადი და დადებითი რიცხვების მიმდევრობა. მაშინ იმისთვის, რომ ნორლუნდის საშუალოების ქვემიმდევრობების (3.1.22) მაქსიმალური ოპერატორი იყოს შემოსაზღვრული იყოს მარტინგალური ჰარდის $H_p(G)$ სივრციდან ლებეგის $L_p(G)$ სივრცეში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\frac{2^{N(1-p)}}{Q^p_{2^N}}\sum_{j=1}^{N}Q^p_{2^j}2^{j(p-1)}<\infty.$$

პრობლემა ასევე აქტუალურია $0<p<1$-თვის. ამ შემთხვევაში ამ თეზისში ჩვენ ვაჩვენებთ (იხ. ასევე [14]), რომ $0\le\alpha\le 1$, β არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვი და t_n არის ნორლუნდის საშუალოები, რომელიც წარმოქმნილია ამოზნექილი და არაზრდადი $\{q_k : k\in\mathbb{N}\}$ მიმდევრობით, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\frac{q_1-(3/2)q_3}{Q_n}\ge\frac{C}{k^{\alpha}\ln^{\beta}k},$$

სადაც C აბსოლუტური მუდმივია. მაშინ, ნებისმიერი $0<p<1/(1+\alpha)$-თვის, მოიძებნება მარტინგალი $f\in H_p(G)$ ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\|t_{2^k}f\|_{L_{p,\infty}}=\infty.$$

3.2 უოლშ-ფურიეს მწკრივის ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების ქვემიმდევრობები და მათი მაქსიმალური ოპერატორები ლებეგის და ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებზე

როგორც ზემოთ ვახსენეთ, [43]-ში გოგინავამ და ნოჯიმ იპოვეს აუცილებელი და საკმარისი პირობები და დეტალურად შეისწავლეს ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების ქვემიმდევრობების შემოსაზღვრულობა $H_1(G)$ სივრციდან ლებეგის $L_1(G)$ სივრცეში.

ამ თავში შევისწავლით ნორლუნის ლოგართთმული საშუალოების ქვემიმდევრობების კრებადობის საკითხების შევეხებით ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებში, როცა $0 < p < 1$. ჩვენ დავამტკიცებთ ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების 2^n ქვემიმდევრობის განშლადობას $H_p(G)$ სივრციდან $L_p(G)$ სივრცეში, როცა $0 < p < 1$. ეს თეორემა დამტკიცებულია [15]-ში და ამომწურავ პასუხს გვაძლევს ნორლუნდის საშუალოების შემოსაზღვრულობის შესახებ, როცა $0 < p < 1$, რადგან საუკეთესო შემთხვევაშიც კი, 2^n ქვემიმდევრობის გასწვრივ ჩვენ გვაქვს უარყოფითი შედეგი.

ამ თეორემის სასამტკიცებლად ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი ლემის დამტკიცება, რომელიც ასევე მოყვანილია [15]-ში:

ლემა 3.1. *ვთქვათ* $n \in \mathbb{N}$ *და* $x \in I_2^{0,1} := I_2(e_0 + e_1)$. *მაშინ*

$$\left|\sum_{j=2^{2m_k}}^{2^{2m_k+1}} \frac{D_j(x)}{2^{2m_k+1} - j}\right| \geq \frac{1}{3}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $x \in I_2^{0,1}$. თუ გამოვიყენებთ (1.3.2) და (1.3.3) ტოლობებს მივიღებთ

$$D_j\left(x\right) = \begin{cases} -w_j(x), & \text{თუ } j \text{ არის კენტი,} \\ 0, & \text{თუ } j \text{ არის ლუწი,} \end{cases}$$

და

$$\begin{aligned} \sum_{j=2^{2m_k}}^{2^{2m_k+1}-1} \frac{D_j}{2^{2m_k+1} - j} &= \sum_{j=2^{2m_k-1}}^{2^{2m_k}-1} \frac{w_{2j+1}}{2^{2m_k+1} - 2j - 1} \\ &= -w_1 \sum_{j=2^{2m_k-1}}^{2^{2m_k}-1} \frac{w_{2j}}{2^{2m_k+1} - 2j - 1}. \end{aligned}$$

მას შემდეგ რაც

$$\begin{aligned} &\sum_{j=2^{2m_k-2}+1}^{2^{2m_k-1}-1} \left|\frac{1}{2^{2m_k+1} - 4j + 3} - \frac{1}{2^{2m_k+1} - 4j + 1}\right| \\ = &\sum_{j=2^{2m_k-2}+1}^{2^{2m_k-1}-1} \frac{2}{(2^{2m_k+1} - 4j + 3)(2^{2m_k+1} - 4j + 1)} \\ \leq &\sum_{j=2^{2m_k-2}+1}^{2^{2m_k-1}-1} \frac{2}{(2^{2m_k+1} - 4j)(2^{2m_k+1} - 4j)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{8}\sum_{j=2^{2m_k-2}+1}^{2^{2m_k-1}-1}\frac{1}{(2^{2m_k-1}-j)(2^{2m_k-1}-j)}\\
&\leq \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}\\
&\leq \frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\\
&\leq \frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4},
\end{aligned}
$$

თუ გამოვიყენებთ ტოლობას

$$w_{4k+2}=w_2w_{4k}=-w_{4k},\ \text{როცა}\ x\in I_2^{0,1},$$

ჩვენ მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=2^{2m_k}}^{2^{2m_k+1}-1}\frac{D_j}{2^{2m_k+1}-j}\right|\\
=&\left|w_{2^{2m_k+1}-2}+\frac{w_{2^{2m_k+1}-4}}{3}+\sum_{j=2^{2m_k-1}+1}^{2^{2m_k}-1}\frac{w_{2j}}{2^{2m_k+1}-2j-1}\right|\\
=&\left|\frac{w_{2^{2m_k+1}-4}}{3}-w_{2^{2m_k+1}-4}+\sum_{j=2^{2m_k-1}+1}^{2^{2m_k}-1}\frac{w_{2j}}{2^{2m_k+1}-2j-1}\right|\\
=&\left|\frac{2w_{2^{2m_k+1}-4}}{3}+\sum_{j=2^{2m_k-2}+1}^{2^{2m_k-1}}\left(\frac{w_{4j-4}}{2^{2m_k+1}-4j+3}+\frac{w_{4j-2}}{2^{2m_k+1}-4j+1}\right)\right|\\
=&\left|\frac{2w_{2^{2m_k+1}-4}}{3}+\sum_{j=2^{2m_k-2}+1}^{2^{2m_k-1}}\left(\frac{w_{4j-4}}{2^{2m_k+1}-4j+3}-\frac{w_{4j-4}}{2^{2m_k+1}-4j+1}\right)\right|\\
\geq&\ \frac{2}{3}-\sum_{j=2^{2m_k-2}+1}^{2^{2m_k-1}}\left|\frac{1}{2^{2m_k+1}-4j+3}-\frac{1}{2^{2m_k+1}-4j+1}\right|\\
\geq&\ \frac{2}{3}-\frac{1}{4}\geq\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

ლემის დამტკიცება დასრულებულია. ■

ახლა უკვე მზად ვართ ზემოთ ხსენებული თეორემის დასამტკიცებლად.

თეორემა 3.2. *ვთქვათ* $0<p<1$. *მაშინ მოიძებნება მარტინგალი* $f\in H_p(G)$, *ისეთი, რომ*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|L_{2^n}f\|_{L_{p,\infty}}=\infty.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\{m_k:k\in\mathbb{N}\}$ არის დადებითი რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k^{-p/2} < \infty, \tag{3.2.1}$$

$$\sum_{\eta=0}^{k-1} \frac{\left(2^{2m_\eta}\right)^{1/p}}{\sqrt{m_\eta}} < \frac{\left(2^{2m_k}\right)^{1/p}}{\sqrt{m_k}}, \tag{3.2.2}$$

და

$$\frac{\left(2^{2m_{k-1}}\right)^{1/p}}{\sqrt{m_{k-1}}} < \frac{2^{2m_k-8}}{m_k^{1/2} l_{2^{2m_k+1}}}. \tag{3.2.3}$$

ვთქვათ

$$f^{(n)} := \sum_{\{k,\, 2m_k<n\}} \lambda_k a_k^{(p)},$$

სადაც

$$\lambda_k = \frac{1}{\sqrt{m_k}}$$

და

$$a_k^{(p)} = 2^{2m_k(1/p-1)} \left(D_{2^{2m_k+1}} - D_{2^{2m_k}}\right).$$

(3.2.1)-ის და ლემა 1.4-ის გათვალისწინებით ჩვენ დავასკვნით, რომ $f \in H_p(G)$. ადვილი სანახავი ნებელია

$$\widehat{f}(j) = \begin{cases} \frac{2^{2m_k(1/p-1)}}{\sqrt{m_k}}, & \text{თუ } j \in \left\{2^{2m_k}, ..., \ 2^{2m_k+1}-1\right\}, \ k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{თუ } j \notin \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left\{2^{2m_k}, ..., \ 2^{2m_k+1}-1\right\}. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

უფრო მეტიც,

$$L_{2^{2m_k+1}} f = \frac{1}{l_{2^{2m_k+1}}} \sum_{j=1}^{2^{2m_k}-1} \frac{S_j f}{2^{2m_k+1}-j} + \frac{1}{l_{2^{2m_k+1}}} \sum_{j=2^{2m_k}}^{2^{2m_k+1}-1} \frac{S_j f}{2^{2m_k+1}-j} \tag{3.2.5}$$

$$:= I + II.$$

ვთქვათ $j < 2^{2m_k}$. (3.2.2)-ის, (3.2.3)-ის და (3.2.4)-ის გამოყენებით დავასკვნით

$$\begin{aligned} |S_j f(x)| &\leq \sum_{\eta=0}^{k-1} \sum_{v=2^{2m_\eta}}^{2^{2m_\eta+1}-1} \left|\widehat{f}(v)\right| \\ &\leq \sum_{\eta=0}^{k-1} \sum_{v=2^{2m_\eta}}^{2^{2m_\eta+1}-1} \frac{2^{2m_\eta(1/p-1)}}{\sqrt{m_\eta}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{\eta=0}^{k-1}\frac{2^{2m_\eta/p}}{\sqrt{m_\eta}}\\
&\leq \frac{2^{2m_{k-1}/p+1}}{\sqrt{m_{k-1}}}\\
&< \frac{2^{2m_k-4}}{m_k^{1/2}l_{2^{2m_k+1}}}.
\end{aligned}
$$

აქედან,

$$
\begin{aligned}
|I| &\leq \frac{1}{l_{2^{2m_k+1}}}\sum_{j=1}^{2^{2m_k}-1}\frac{|S_jf(x)|}{2^{2m_k+1}-j} \qquad (3.2.6)\\
&\leq \frac{1}{l_{2^{2m_k+1}}}\frac{2^{2m_{k-1}/p}}{\sqrt{m_{k-1}}}\sum_{j=1}^{M_{2m_k+1}-1}\frac{1}{j}\\
&\leq \frac{2^{2m_{k-1}/p}}{\sqrt{m_{k-1}}}.
\end{aligned}
$$

ვთქვათ $2^{2m_k}\leq j\leq 2^{2m_k+1}-1$. მაშინ, ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ

$$
\begin{aligned}
S_jf &= \sum_{\eta=0}^{k-1}\sum_{v=2^{2m_\eta}}^{2^{2m_\eta+1}-1}\widehat{f}(v)w_v+\sum_{v=2^{2m_k}}^{j-1}\widehat{f}(v)w_v\\
&= \sum_{\eta=0}^{k-1}\frac{2^{2m_\eta(1/p-1)}}{\sqrt{m_\eta}}\left(D_{2^{2m_\eta+1}}-D_{2^{2m_\eta}}\right)+\frac{2^{2m_k(1/p-1)}}{\sqrt{m_k}}\left(D_j-D_{2^{2m_k}}\right).
\end{aligned}
$$

აქედან, კერძოდ მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
II = &\frac{1}{l_{2^{2m_k+1}}}\sum_{j=2^{2m_k}}^{2^{2m_k+1}}\frac{1}{2^{2m_k+1}-j}\left(\sum_{\eta=0}^{k-1}\frac{2^{2m_\eta(1/p-1)}}{\sqrt{m_\eta}}\left(D_{2^{2m_\eta+1}}-D_{2^{2m_\eta}}\right)\right) \qquad (3.2.7)\\
&+\frac{1}{l_{2^{2m_k+1}}}\frac{2^{2m_k(1/p-1)}}{\sqrt{m_k}}\sum_{j=2^{2m_k}}^{2^{2m_k+1}-1}\frac{\left(D_j-D_{2^{2m_k}}\right)}{2^{2m_k+1}-j}\\
&:= II_1+II_2.
\end{aligned}
$$

ვთქვათ $x\in I_2^{0,1}:=I_2(e_0+e_1)$. იმის გათვალისწინებით, რომ $m_0\geq 1$ ჩვენ მივიღებთ $2m_k\geq 2$, ნებისმიერი $k\in\mathbb{N}$-თვის და თუ გამოვიყენებთ (1.3.2)-ს მივიღებთ $D_{2^{2m_k}}=0$,

$$II_1=0 \qquad (3.2.8)$$

და

$$
II_2 = \frac{1}{l_{2^{2m_k+1}}}\frac{2^{2m_k(1/p-1)}}{\sqrt{m_k}}\sum_{j=2^{2m_k-1}+1}^{2^{2m_k}-1}\frac{w_{2j+1}}{2^{2m_k+1}-2j-1}
$$

$$= \frac{1}{l_{2^{2m_k+1}}} \frac{2^{2m_k(1/p-1)}w_1}{\sqrt{m_k}} \sum_{j=2^{2m_k-1}+1}^{2^{2m_k-1}} \frac{w_{2j}}{2^{2m_k+1}-2j-1}.$$

თუ გამოვიყენებთ ლემა 3.1-ს მივიღებთ

$$\begin{aligned} |II_2| &\geq \frac{1}{3}\frac{1}{l_{2^{2m_k+1}}}\frac{2^{2m_k(1/p-1)}}{\sqrt{m_k}} \\ &\geq \frac{1}{l_{2^{2m_k+1}}}\frac{2^{2m_k(1/p-1)-1}}{\sqrt{m_k}}. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

(3.3.5)-ის, და (3.2.5)-(3.2.9) შეფასებების გამოყენებით, ნებისმიერი $x \in I_2^{0,1}$-თვის და $0 < p < 1$-თვის დავასკვნით

$$\begin{aligned} \left|L_{2^{2m_k+1}}f(x)\right| &\geq II_2 - II_1 - I \\ &\geq \frac{1}{l_{2^{2m_k+1}}}\frac{2^{2m_k(1/p-1)-2}}{\sqrt{m_k}} - \frac{1}{l_{2^{2m_k+1}}}\frac{2^{2m_k(1/p-1)-3}}{\sqrt{m_k}} \\ &\geq \frac{1}{l_{2^{2m_k+1}}}\frac{2^{2m_k(1/p-1)-3}}{\sqrt{m_k}} \\ &\geq \frac{2^{2m_k(1/p-1)-3}}{\left(\ln 2^{2m_k+1}+1\right)\sqrt{m_k}} \\ &\geq \frac{2^{2m_k(1/p-1)-3}}{(4m_k+1)\sqrt{m_k}} \\ &\geq \frac{2^{2m_k(1/p-1)-6}}{m_k^{3/2}}. \end{aligned}$$

აქედან, საბოლოოდ დავასკვნით

$$\begin{aligned} &\left\|L_{q^s_{m_k}}f\right\|_{L_{p,\infty}} \\ \geq\ & \frac{2^{2m_k(1/p-1)-6}}{m_k^{3/2}}\mu\left\{x\in G : \left|L_{2^{2m_k+1}}f\right| \geq \frac{2^{2m_k(1/p-1)-6}}{m_k^{3/2}}\right\}^{1/p} \\ \geq\ & \frac{2^{2m_k(1/p-1)-6}}{m_k^{3/2}}\mu\left\{x\in I_2^{0,1} : \left|L_{2^{2m_k+1}}f\right| \geq \frac{2^{2m_k(1/p-1)-6}}{m_k^{3/2}}\right\}^{1/p} \\ \geq\ & \frac{2^{2m_k(1/p-1)-6}}{m_k^{3/2}}\left(\mu\left(I_2^{0,1}\right)\right)^{1/p} \\ >\ & \frac{c2^{2m_k(1/p-1)}}{m_k^{3/2}} \to \infty, \quad \text{როცა} \quad k\to\infty. \end{aligned}$$

თორემა დამტკიცებულია. ■

ამ თეორემიდან ადვილად მივიღებთ შემდეგ შემდეგებს:

შედეგი 3.3. *ვთქვათ* $0 < p < 1$. *მაშინ, მაქსიმალური ოპერატორი*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}|L_{2^n}f|$$

არ არის ძლიერი (სუსტი) (H_p, L_p) ტიპის.

შედეგი 3.4. *ვთქვათ $0<p<1$. მაშინ, მაქსიმალური ოპერატორი*

$$L^*f=\sup_{n\in\mathbb{N}}|L_nf|$$

არ არის ძლიერი (სუსტი) (H_p, L_p) ტიპის.

3.3 უოლშ-ფურიეს მწკრივის ნორლუნდის საშუალოების ქვემიმდევრობები და მათი მაქსიმალური ოპერატორები ლებეგის და ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებზე

ამ თავში შევეხებით ნორლუნის საშუალოების ქვემიმდევრობების კრებადობის საკითხების ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებში, როცა $0<p<1$. ჩვენ ნორლუნდის საშუალოების ძალიან ფართო კლასისთვის დავიმტკიცებთ ანალოგიურ შედეგს, რაც წინა თავში იყო მიღებული ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოებისთვის და მივითებთ ზოგიერთი ნორლუნდის საშუალოების 2^n ქვემიმდევრობის განშლადობას $H_p(G)$ სივრციდან $L_p(G)$ სივრცეში, როცა $0<p<1$. ეს თეორემა დამტკიცებულია [15]-ში და ამომწურავ პასუხს გვაძლევს ნორლუნდის საშუალოების შემოსაზღვრულობის შესახებ, როცა $0<p<1$, რადგან საუკეთესო შემთხვევაშიც კი, 2^n ქვემიმდევრობის გასწვრივ ჩვენ გვაქვს უარყოფითი შედეგი. ეს თეორემა დამტკიცებულია [14]-ში.

2^n ქვემიმდევრობის ამ შეჯამებადობის მეთოდების შესწავლა იმითაცაა აქტუალური რომ შემოსაზღვრულობის შემთხვევაში, საშუალება მოგვეცემოდა განგვეზოგადებინა ტეფნაძის [83, 86, 87] მიერ კერძო ჯამებისა და ფეიერის საშუალოებისთვის დამუშავებული მეთოდები ნორლუნის ლოგარითმული საშუალოებისთვის, ჩეზაროს საშუალოებისთვის და ასევე ბევრი სხვა შეჯამებადობის მეთოდისთვის მიგვეღო ისეთი აუცილებელი და საკმარისი პირობები მარტინგალის უწყვეტობის მოდულებისთვის H_p სივრცეში, რომლებიც უზრუნველყოფენ ამ შეჯამებადობის მეთოდების კრებადობას H_p ნორმით. ამ პრობლემაზე უარყოფითი პასუხის გაცემის შემდეგ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ საჭიროა ახალი მეთოდების დამუშავება ამ საკითხების შესასწავლად, რაც დღემდე ღია, მაგრამ მეტად ძალიან საინტერესო პრობლემებს წარმოადგენენ.

პირველ რიგში დავგჭირდება ამოზნექილი მიმდევრობის ცნება, რომელსაც საკმაოდ მჭიდრო კავშირი გააჩნია ამოზნექილ ფუნქციებთან.

ვიტყვით, რომ მიმდევრობა $\{b_k,\ k\ge 0\}$ არის ამოზნექილი, თუ

$$b_{n-1}+b_{n+1}-2b_n\ge 0,\quad \text{ნებისმერი}\quad n\in\mathbb{N}\text{-თვის.}$$

თუ $b(x)$ არის ნამდვილი ცვლადის ამოზნექილი ფუნქცია, მაგალითად, თუ

$$b(x)=x^{\alpha-1},\ 0\le\alpha\le 1,$$

მაშინ რიცხვითი მიმდევრობა $\{b(n),\ n \in \mathbb{N}\}$ იქნება ამოზნექილი.

რადგან

$$b_{n-2} - b_{n-1} \geq b_{n-1} - b_n \geq b_n - b_{n+1} \geq b_{n+1} - b_{n+2},$$

მივიღებთ

$$b_{n-2} + b_{n+2} \geq b_{n-1} + b_{n+1},$$

საიდანაც

$$b_{n-2} + b_{n+2} - 2b_n \geq 0, \quad \text{ნებისმერი} \quad n \in \mathbb{N}\text{-თვის}. \tag{3.3.1}$$

ჩვენ ასევე დაგვჭირდება შემდეგი მნიშვნელოვანი ლემა, რომელიც ასევე დამტკიცებულია [14]-ში:

ლემა 3.5. *ვთქვათ $k \in \mathbb{N}$, $\{q_k, k \in \mathbb{N}\}$ არის ამოზნექილი, არაზრდადი მიმდევრობა და $x \in I_2^{0,1} := I_2(e_0 + e_1)$. მაშინ, ნებისმიერი $\{m_k\}$-თვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:*

$$\left|\sum_{j=2^{2m_k}}^{2^{2m_k+1}} q_{2^{2m_k+1}-j} D_j(x)\right| \geq q_1 - \frac{3}{2} q_3.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $x \in I_2^{0,1}$. მაშინ (1.3.2) და (1.3.3) ტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$D_j(x) = \begin{cases} -w_j(x), & \text{თუ } j \text{ არის კენტი}, \\ 0, & \text{თუ } j \text{ არის ლუწი}, \end{cases}$$

და

$$\begin{aligned} \sum_{j=2^{2m_k}}^{2^{2m_k+1}-1} q_{2^{2m_k+1}-j} D_j &= -\sum_{j=2^{2m_k-1}}^{2^{2m_k}-1} q_{2^{2m_k+1}-2j-1} w_{2j+1} \\ &= -w_1 \sum_{j=2^{2m_k-1}}^{2^{2m_k}-1} q_{2^{2m_k+1}-2j-1} w_{2j}. \end{aligned}$$

აქედან, თუ გამოვიყენებთ ტოლობას

$$w_{4k+2} = w_2 w_{4k} = -w_{4k}, \quad \text{სადაც} \quad x \in I_2^{0,1},$$

მივიღებთ

$$\left|\sum_{j=2^{2m_k}}^{2^{2m_k+1}-1} q_{2^{2m_k+1}-j} D_j\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| q_1 w_{2^{2m_k+1}-2} + q_3 w_{2^{2m_k+1}-4} + \sum_{j=2^{2m_k-1}}^{2^{2m_k}-3} q_{2^{2m_k+1}-2j-1} w_{2j} \right| \\
&= \left| (q_3 - q_1) w_{2^{2m_k+1}-4} + \sum_{j=2^{2m_k-2}+1}^{2^{2m_k-1}-1} \left(q_{2^{2m_k+1}-4j+3} w_{4j-4} - q_{2^{2m_k+1}-4j+1} w_{4j-4} \right) \right| \\
&\geq q_1 - q_3 - \sum_{j=2^{2m_k-2}+1}^{2^{2m_k-1}-1} \left| q_{2^{2m_k+1}-4j+3} - q_{2^{2m_k+1}-4j+1} \right| \\
&= I - II.
\end{aligned}
$$

თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ $\{q_k\}$ მიმდევრობა არაზრდადია, II შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$
\begin{aligned}
II &= \sum_{j=2^{2m_k-2}+1}^{2^{2m_k-1}-1} \left| q_{2^{2m_k+1}-4j+3} - q_{2^{2m_k+1}-4j+1} \right| \\
&= \sum_{j=2^{2m_k-2}+1}^{2^{2m_k-1}-1} \left(q_{2^{2m_k+1}-4j+1} - q_{2^{2m_k+1}-4j+3} \right) \\
&= \left(q_{2^{2m_k}-3} - q_{2^{2m_k}-1} \right) + \left(q_{2^{2m_k}-7} - q_{2^{2m_k}-5} \right) + \ldots + (q_5 - q_7).
\end{aligned}
$$

თუ გამოვიყენებთ (3.3.1)-ს თითოეული შესაკრებისთვის (ფრჩხილისთვის) მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
II &\leq \frac{1}{2} \left(q_{2^{2m_k}-3} - q_{2^{2m_k}-1} \right) + \frac{1}{2} \left(q_{2^{2m_k}-5} - q_{2^{2m_k}-3} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left(q_{2^{2m_k}-7} - q_{2^{2m_k}-5} \right) + \frac{1}{2} \left(q_{2^{2m_k}-9} - q_{2^{2m_k}-7} \right) \\
&+ \ldots + \frac{1}{2} (q_5 - q_7) + \frac{1}{2} (q_3 - q_5) \\
&\leq \frac{1}{2} q_3 - \frac{1}{2} q_{2^{2m_k}-1}.
\end{aligned}
$$

აქედან,

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{j=2^{2m_k}}^{2^{2m_k+1}-1} q_{2^{2m_k+1}-j} D_j \right| &\geq I - II \\
&\geq q_1 - q_3 - \frac{1}{2}(q_3 - q_{2^{2m_k}-1}) \\
&\geq q_1 - \frac{3}{2} q_3.
\end{aligned}
$$

ლემა დამტკიცებულია. ■

ახლა ჩვენ დავამტკიცებთ ნორლუნდის საშუალოების ქვემიმდევრობების და მათი შეზღუდული მაქსიმალური ოპერატორების შემოუსაზღვრელობის შესახებ თეორემას მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე, რომელიც დამტკიცებულია [14]-ში.

თეორემა 3.6. *ვთქვათ $0 \le \alpha \le 1$, β არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვი და t_n არის ნორლუნდის საშუალოები, რომელიც წარმოაქმნილია ამოზნექილი და არაზრდადი $\{q_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობით, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას*

$$\frac{q_1-(3/2)q_3}{Q_n} \ge \frac{C}{n^{\alpha}\ln^{\beta} n}, \tag{3.3.2}$$

სადაც C აბსოლუტური მუდმივია. მაშინ, ნებისმიერი $0<p<1/(1+\alpha)$-თვის, მოიძებნება მარტინგალი $f \in H_p$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|t_{2^n} f\|_{L_{p,\infty}} = \infty.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $0<p<1/(1+\alpha)$. (3.3.2) პირობის გათვალისწინებით არსებობს ისეთი $\{m_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ ზრდადი რიცხვების მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k^{-p/2} < \infty, \tag{3.3.3}$$

$$\sum_{\eta=0}^{k-1} \frac{\left(2^{2m_\eta}\right)^{1/p}}{\sqrt{m_\eta}} < \frac{\left(2^{2m_k}\right)^{1/p}}{\sqrt{m_k}} \tag{3.3.4}$$

და

$$\frac{\left(2^{2m_{k-1}}\right)^{1/p}}{\sqrt{m_{k-1}}} < \frac{q_1-(3/2)q_3}{Q_{2^{2m_k+1}}} \frac{2^{2m_k(1/p-1)-3}}{m_k}. \tag{3.3.5}$$

ვთქვათ

$$f^{(n)} := \sum_{\{k,\ 2m_k<n\}} \lambda_k a_k^{(p)},$$

სადაც

$$\lambda_k = \frac{1}{\sqrt{m_k}}$$

და

$$a_k^{(p)} = 2^{2m_k(1/p-1)}\left(D_{2^{2m_k+1}} - D_{2^{2m_k}}\right).$$

(3.3.3)-ის და ლემა 1.4-ის გათვალისწინებით ჩვენ დავასკვნით, რომ $f \in H_p(G)$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ამ მარტინგალის ფურიეს კოეფიციენტები გამოითვლება შემდეგნაირად

$$\widehat{f}(j) = \begin{cases} \frac{2^{2m_k(1/p-1)}}{\sqrt{m_k}}, & \text{თუ } j \in \left\{2^{2m_k}, \dots,\ 2^{2m_k+1}-1\right\},\ k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{თუ } j \notin \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left\{2^{2m_k}, \dots,\ 2^{2m_k+1}-1\right\}. \end{cases} \tag{3.3.6}$$

უფრო მეტიც,

$$\begin{aligned} & t_{2^{2m_k+1}}f \\ = \quad & \frac{1}{Q_{2^{2m_k+1}}}\sum_{j=1}^{2^{2m_k}-1} q_{2^{2m_k+1}-j}S_jf + \frac{1}{Q_{2^{2m_k+1}}}\sum_{j=2^{2m_k}}^{2^{2m_k+1}} q_{2^{2m_k+1}-j}S_jf \\ := \quad & I + II. \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

ვთქვათ $j < 2^{2m_k}$. (3.3.4)-ის, (3.3.5)-ის და (3.3.6)-ის გაერთიანებით ჩვენ დავასკვნით

$$\begin{aligned} |S_jf| &\leq \sum_{\eta=0}^{k-1}\sum_{v=2^{2m_\eta}}^{2^{2m_\eta+1}-1}\left|\widehat{f}(v)\right| \\ &\leq \sum_{\eta=0}^{k-1}\sum_{v=2^{2m_\eta}}^{2^{2m_\eta+1}-1}\frac{2^{2m_\eta(1/p-1)}}{\sqrt{m_\eta}} \\ &\leq \sum_{\eta=0}^{k-1}\frac{2^{2m_\eta/p}}{\sqrt{m_\eta}} \leq \frac{2^{2m_{k-1}/p}}{\sqrt{m_{k-1}}}. \end{aligned}$$

აქედან,

$$\begin{aligned} |I| &\leq \frac{1}{Q_{2^{2m_k+1}}}\sum_{j=1}^{2^{2m_k}-1} q_{2^{2m_k+1}-j}|S_jf| \\ &\leq \frac{1}{Q_{2^{2m_k+1}}}\frac{2^{2m_{k-1}/p}}{\sqrt{m_{k-1}}}\sum_{j=0}^{2^{2m_k+1}-1} q_j \\ &\leq \frac{2^{2m_{k-1}/p}}{\sqrt{m_{k-1}}}. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

ვთქვათ $2^{2m_k} \leq j \leq 2^{2m_k+1}$. მას შემდეგ რაც

$$\begin{aligned} S_jf &= \sum_{\eta=0}^{k-1}\sum_{v=2^{2m_\eta}}^{2^{2m_\eta+1}-1}\widehat{f}(v)w_v + \sum_{v=2^{2m_k}}^{j-1}\widehat{f}(v)w_v \\ &= \sum_{\eta=0}^{k-1}\frac{2^{2m_\eta(1/p-1)}}{\sqrt{m_\eta}}\left(D_{2^{2m_\eta+1}} - D_{2^{2m_\eta}}\right) + \frac{2^{2m_k(1/p-1)}}{\sqrt{m_k}}\left(D_j - D_{2^{2m_k}}\right), \end{aligned}$$

II-თვის ჩვენ მივიღებთ

$$\begin{aligned} II = & \frac{1}{Q_{2^{2m_k+1}}}\sum_{j=2^{2m_k}}^{2^{2m_k+1}} q_{2^{2m_k+1}-j}\left(\sum_{\eta=0}^{k-1}\frac{2^{2m_\eta(1/p-1)}}{\sqrt{m_\eta}}\left(D_{2^{2m_\eta+1}} - D_{2^{2m_\eta}}\right)\right) \\ & + \frac{1}{Q_{2^{2m_k+1}}}\frac{2^{2m_k(1/p-1)}}{\sqrt{m_k}}\sum_{j=2^{2m_k}}^{2^{2m_k+1}} q_{2^{2m_k+1}-j}(D_j - D_{2^{2m_k}}). \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

ვთქვათ $x\in I_2^{0,1}$. იმის გათვალისწინებით, რომ $m_0\geq 1$, ჩვენ მივიღებთ, რომ $2m_k\geq 2$, ნებისმიერი $k\in\mathbb{N}$-თვის და გამოვიყენებთ (1.3.2)-ს მივიღებთ $D_{2^{2m_k}}=0$. თუ დამატებით, გამოვიყენებთ ლემა 3.5-ს, მივიღებთ

$$\begin{aligned} |II| &= \frac{1}{Q_{2^{2m_k+1}}}\frac{2^{2m_k(1/p-1)}}{\sqrt{m_k}}\sum_{j=2^{2m_k}}^{2^{2m_k+1}} q_{2^{2m_k+1}-j}D_j \\ &\geq \frac{q_1-(3/2)q_3}{Q_{2^{2m_k+1}}}\frac{2^{2m_k(1/p-1)}}{\sqrt{m_k}}. \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

(3.3.5)-ის, (3.3.7)-(3.3.10) შეფასებების გამოყენებით, როცა $x\in I_2^{0,1}$ ჩვენ გვაქვს

$$\begin{aligned} \left|t_{2^{2m_k+1}}f(x)\right| &\geq |II|-|I| \\ &\geq \frac{q_1-(3/2)q_3}{Q_{2^{2m_k+1}}}\frac{2^{2m_k(1/p-1)}}{\sqrt{m_k}}-\frac{q_1-(3/2)q_3}{Q_{2^{2m_k+1}}}\frac{2^{2m_k(1/p-1)-3}}{m_k} \\ &\geq \frac{q_1-(3/2)q_3}{Q_{2^{2m_k+1}}}\frac{2^{2m_k(1/p-1)-3}}{\sqrt{m_k}} \\ &\geq \frac{C2^{2m_k(1/p-1-\alpha)-3}}{\left(\ln 2^{2m_k+1}+1\right)^{\beta}\sqrt{m_k}} \\ &\geq \frac{C2^{2m_k(1/p-1-\alpha)-3}}{m_k^{\beta+1}}. \end{aligned}$$

აქედან, საბოლოოდ ჩვენ დავასკვნით

$$\begin{aligned} &\left\|t_{2^{2m_k+1}}f\right\|_{L_{p,\infty}} \\ \geq\ & \frac{C2^{2m_k(1/p-1-\alpha)-3}}{m_k^{\beta+1}}\mu\left\{x\in G:\left|t_{2^{2m_k+1}}f\right|\geq\frac{C2^{2m_k(1/p-1)-3}}{m_k^{\beta+1}}\right\}^{1/p} \\ \geq\ & \frac{C2^{2m_k(1/p-1-\alpha)-3}}{m_k^{\beta+1}}\mu\left\{x\in I_2^{0,1}:\left|t_{2^{2m_k+1}}f\right|\geq\frac{C2^{2m_k(1/p-1)-3}}{m_k^{\beta+1}}\right\}^{1/p} \\ \geq\ & \frac{C2^{2m_k(1/p-1-\alpha)-3}}{m_k^{\beta+1}}\left(\mu\left(I_2^{0,1}\right)\right)^{1/p} \\ >\ & \frac{c2^{2m_k(1/p-1-\alpha)}}{m_k^{\beta+1}}\to\infty,\quad \text{როცა}\quad k\to\infty. \end{aligned}$$

თეორემა დამტკიცებულია. ■

კონკრეტულ შემთხვევაში ჩვენ მივიღებთ შედეგს ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების შესახებ, რომელიც დამტკიცებულია [15]-ში:

შედეგი 3.7. *ვთქვათ $0<p<1$. მაშინ მოიძებნება მარტინგალი $f\in H_p(G)$ ისეთი, რომ*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|L_{2^k}f\right\|_{L_{p,\infty}}=\infty.$$

დამტკიცება. ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$q_1 - (3/2)q_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} > 0,$$

და პირობა (3.3.2) სრულდება მაშინ, როცა $\alpha = \beta = 0$. ■

შედეგი 3.8. *ვთქვათ* $0 < p < 1$. *მაშინ, მაქსიმალური ოპერატორი*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |L_{2^k} f|$$

არ არის ძლიერი (სუსტი) (H_p, L_p) *ტიპის.*

ჩვენ ასევე გვაქვს ანალოგიური შედეგი V_k საშუალოებისთვის:

შედეგი 3.9. *ვთქვათ* $0 < p < 1$. *მაშინ მოიძებნება მარტინგალი* $f \in H_p(G)$ *ისეთი, რომ*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|V_{2^k} f\|_{L_{p,\infty}} = \infty.$$

დამტკიცება. ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\begin{aligned} q_1 - (3/2)q_3 &= \frac{1}{\ln 2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\ln 4} \\ &= \log_2^e - (3/2)\frac{\log_2^e}{\log_2^4} \\ &= \log_2^e \left(1 - \frac{3}{4}\right) > 0, \end{aligned}$$

და პირობა (3.3.2) სრულდება მაშინ, როცა $\alpha = \beta = 0$. ■

შედეგი 3.10. *ვთქვათ* $0 < p < 1$. *მაშინ, მაქსიმალური ოპერატორი*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |V_{2^k} f|$$

არ არის ძლიერი (სუსტი) (H_p, L_p) *ტიპის.*

ამ თეორემიდან ასევე მივიღებთ ანალოგიურ შედეგს $\sigma_{2^n}^\alpha$ საშუალოებისთვის:

შედეგი 3.11. *ვთქვათ* $0 < p < 1/(1+\alpha)$, *სადაც* $0 < \alpha \leq 0.56$. *მაშინ მოიძებნება მარტინგალი* $f \in H_p$ *ისეთი, რომ*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\sigma_{2^k}^\alpha f\|_{L_{p,\infty}} = \infty.$$

დამტკიცება. რუტინული გამოთვლებით ჩვენ მივიღებთ

$$q_1 - (3/2)q_3 = \alpha - \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{4} = \alpha \cdot \frac{2 - 3\alpha - \alpha^2}{4}.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ როცა $0 < \alpha < 0.56$, ეს გამოსახულება არის დადებითი. ამის გათვალისწინებით, (3.3.2) სრულდება როცა $\beta = 0$ და $0 < \alpha < 1$. ■

შედეგი 3.12. *ვთქვათ* $0 < p < 1/(1+\alpha)$, *სადაც* $0 < \alpha \leq 0.56$. *მაშინ, მაქსიმალური ოპერატორი*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |\sigma_{2^k}^{\alpha} f|$$

არ არის ძლიერი (სუსტი) (H_p, L_p) *ტიპის.*

შედეგი 3.13. *ვთქვათ* $0 < p < 1/(1+\alpha)$, *სადაც* $0 < \alpha \leq 0.41$. *მაშინ მოიძებნება მარტინგალი* $f \in H_p$ *ისეთი, რომ*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|U_{2^k}^{\alpha} f\|_{L_{p,\infty}} = \infty.$$

დამტკიცება. პირდაპირი გამოთვლებით ჩვენ მივიღებთ

$$q_1 - (3/2)q_3 = 2^{\alpha-1} - (3/2)4^{\alpha-1} = 2^{\alpha-1}\left(1 - 3/2^{2-\alpha}\right).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ როცა $0 < \alpha < 0.41$, ეს გამოსახულება არის დადებითი. ამის გათვალისწინებით, (3.3.2) სრულდება როცა $\beta = 0$ და $0 < \alpha < 1$. ■

შედეგი 3.14. *ვთქვათ* $0 < p < 1/(1+\alpha)$, *სადაც* $0 < \alpha \leq 0.41$. *მაშინ, მაქსიმალური ოპერატორი*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |U_{2^k}^{\alpha} f|$$

არ არის ძლიერი (სუსტი) (H_p, L_p) *ტიპის.*

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] *N. Areshidze, D. Baramidze, L.-E. Persson, G. Tephnadze,* Some new weighted maximal operators of Fejér means of Walsh-Fourier series, Sci. China Math., (submitted).

[2] *N. Antonov,* Convergence of Fourier series, East J. Approx, 2, no. 2, (1996), 187–196.

[3] *G. N. Agaev, N. Ya. Vilenkin, G. M. Dzhafarly, A. I. Rubinshtein,* Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups, Baku, Ehim, (in Russian), 1981.

[4] *D. Baramidze,* A note on some weighted maximal operators of partial sums of Walsh-Fourier series, Acta Math. Acad. Paedagog., (to appear).

[5] *D. Baramidze,* Martingale Hardy spaces and some new weighted maximal operators of partial sums of Walsh-Fourier series, Georgian Math. J., (submitted).

[6] *D. Baramidze,* Martingale Hardy spaces and divergence of maximal operators associated with Walsh-Fourier series, (submitted).

[7] *D. Baramidze,* Martingale Hardy spaces and divergence of maximal operators associated with Walsh-Fejér means, nonlinear studies, (to appear).

[8] *D. Baramidze, I. Blahota, G. Tephnadze and R. Toledo,* Martingale Hardy spaces and some new weighted maximal operator of Fejér means of Walsh-Fourier series, J. Geom. Anal., 34, paper no. 3, (2024), 17 pp.

[9] *D. Baramidze, L. Baramidze, L-E. Persson, G. Tephnadze,* Some now restricted maximal operators of Fejér means of Walsh-Fourier series, Banach J. Math. Anal., 75, 17, no. 4, (2023), 20 pp.

[10] *D. Baramidze, Z. Dvalashvili, G. Tutberidze,* Convergence of Nörlund means with respect to Vilenkin systems of integrable functions, Memoir. Diff. Equat. Math. Phys., 86, (2022), pp. 1–14.

[11] *D. Baramidze, A. Meidell, D. Lukkassen, L.-E. Persson,* Some new $(H_p - L_p)$ type inequalities for weighted maximal operators of Fejér means of Walsh-Fourier series, Math. Inequal. Appl., (submitted).

[12] *D. Baramidze, L.-E. Persson, H. Singh, G. Tephnadze,* Some new weak $(H_p - L_p)$ type inequality for weighted maximal operators of partial sums of Walsh-Fourier series, Mediterr. J. Math., 20 no. 5, paper no. 28, (2023), 13 pp.

[13] *D. Baramidze, L.-E. Persson, G. Tephnadze,* Some new $(H_p - L_p)$ type inequalities for weighted maximal operators of partial sums of Walsh-Fourier series, Positivity, 27 no 3, paper no. 38, (2023), 14 pp.

[14] *D. Baramidze, L.-E. Persson, K. Tangrand, G. Tephnadze,* $(H_p - L_p)$-Type inequalities for subsequences of Nörlund means of Walsh–Fourier series, J. Inequal. Appl., paper no. 52, (2023), 13 pp.

[15] *D. Baramidze, L.-E. Persson, H. Singh, G. Tephnadze,* On the convergence and divergence of subsequence of Nörlund logarithmic means of Walsh-Fourier series, J. Inequal. Appl., paper no. 30, (2022), 13 pp.

[16] *D. Baramidze, G. Tephnadze,* Some new weak-$(H_p - L_p)$ type inequalities for weighted maximal operators of Fejér means of Walsh-Fourier series, Acta Math. Hungar., 171, no. 2, (2023), 267–283.

[17] *ლაშა ბარამიძე,* ზოგიერთი ფუნქციათა კლასისათვის ფურიეს მწკრივების კრებადობა და შეჯამებადობა, სადოქტორო ნაშრომი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, 2023.

[18] *L. Baramidze, L.-E. Persson, G. Tephnadze, P. Wall,* Srtong summability and Boundedness of Maximal operators of Vilenkin-Nörlund means with non-increasing coefficients, J. Inequal. Appl., (2016), paper no. 242, 20 pp.

[19] *L. Baramidze,* Uniform Convergence of Double Vilenkin-Fourier Series, J. Contemp. Math. Anal., 54, no. 3, (2019), 147–156.

[20] *I. Blahota,* On the norm inequality with respect to Vilenkin-like systems, Acta Math. Hungar., 89, no. 1-2, (2000), 15-27.

[21] *I. Blahota, K. Nagy, L.-E. Persson, G. Tephnadze,* A sharp boundedness result concerning maximal operators of Vilenkin-Fourier series on martingale Hardy spaces, Georgian Math., J., 26, no. 3 (2019), 351–360.

[22] *I. Blahota, K. Nagy, G. Tephnadze,* Approximation by Marcinkiewicz Θ-means of double Walsh-Fourier series, Math. Inequal. Appl., 22, no. 3, (2019) 837-853.

[23] *I. Blahota, G. Tephnadze,* On the (C, α)-means with respect to the Walsh system, Anal. Math., 40, (2014), 161-174.

[24] *I. Blahota, G. Tephnadze, R. Toledo,* Strong convergence theorem of (C, α)-means with respect to the Walsh system, Tohoku Math. J., 67, no. 4 (2015), 573-584.

[25] *I. Blahota, L. E. Persson, G. Tephnadze,* On the Nörlund means of Vilenkin-Fourier series, Czechoslovak Math. J., 65, no. 4 (2015), 983-1002.

[26] *I. Blahota, L. E. Persson, G. Tephnadze,* Two-sided estimates of the Lebesgue constants with respect to Vilenkin systems and applications, Glasgow Math. J., 60, no. 1, (2018), 17–34.

[27] *S. Bochkarev,* Asolute convergence of Fourier series with respect to complete orthonormal systems, Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 27, no. 2, (1972), 53–76,

[28] *T. Chantladze, N. Kandelaki, D. Ugulava,* Approximation of functions and measures on locally compact abelian groups, Proc. A. Razmadze Math. Inst., 140, (2006), 65–74.

[29] *D. Ugulava,* On the approximation of functions on locally compact Abelian groups, Georgian Math. J., 6, no. 4, (1999), 379–394.

[30] *D. Ugulava,* Approximation of functions on locally compact Abelian groups, Georgian Math. J., 19, no. 1, (2012), 181–193

[31] *L. Fejér,* Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,* 28, (1911), 63–104.

[32] *S. Fridli,* On the rate of convergence of Cesàro means of Walsh-Fourier series, J. Approx. Theory, 76, no. 1, (1994), 31-53.

[33] *S. Fridli, P. Manchanda, A.H. Siddiqi,* Approximation by Walsh-Nörlund means, Acta Sci. Math.(Szeged) 74, no. 3-4, (2008), 593-608.

[34] *N. J. Fujii,* A maximal inequality for H^1-functions on a generalized Walsh-Paley group, Proc. Amer. Math. Soc. 77 no. 1, (1979), 111-116.

[35] *G. Gàt*, Investigations of certain operators with respect to the Vilenkin system, Acta Math. Hungar., 61, no. 1-2, (1993), 131-149.

[36] *G. Gàt, U. Goginava,* On the divergence of Nörlund logarithmic means of Walsh-Fourier series, Acta Math. Sin., 25. no. 6, (2009), 903-916.

[37] *G. Gát, U. Goginava, G. Tkebuchava,* Convergence in measure of logarithmic means of quadratical partial sums of double Walsh-Fourier series, J. Math. Anal. Appl., 323, no. 1, (2006), 535–549.

[38] *U. Goginava,* The maximal operator of the (C, α) means of the Walsh-Fourier series, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. 26, (2006), 127–135.

[39] *U. Goginava,* Maximal operators of Fejér means of double Walsh-Fourier series, Acta Math. Hungar., 115, no. 4, (2007), 333-340.

[40] *U. Goginava,* Maximal operators of Fejér-Walsh means, Acta Sci. Math. (Szeged), 74, no. 3-4, (2008), 615-624.

[41] *U. Goginava,* On the uniform convergence of Walsh-Fourier series, Acta Math. Hungar., 93, no. 1-2, (2001), 59-70.

[42] *U. Goginava,* Maximal operators of Walsh–Nörlund means on the dyadic Hardy spaces, Acta Math. Hungar., 169, no. 1, (2023), 171-190.

[43] *U. Goginava, K. Nagy,* Some properties of the Walsh-Nörlund means, Quaest. Math., 46, no. 2, (2023), 301–334.

[44] *L. Gogoladze, V. Tsagareishvili,* Some classes of functions and Fourier coefficients with respect to general orthonormal systems, Proc. Steklov Inst. Math., 280, no. 1, (2013), 156–168.

[45] *L. Gogoladze, V. Tsagareishvili,* Summability of general Fourier series, Publ. Math. Debrecen, 91, no. 3-4, (2017), 391–402.

[46] *B. Golubov, A. V. Efimov, V. Skvortsov,* Walsh series and transforms, Mathematics and its Applications, 64, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[47] *N. V. Gulićev,* Approximation to continuous functions by Walsh-Fourier sums, Anal. Math., 6, no. 4, (1980), 269-280.

[48] *Y. Katznelson,* Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques, Studia Mathematica, 26, no. 3, (1966), 301.

[49] *B. Kashin, A. Saakyan,* Orthogonal series, American Mathematical Soc., 75, 2005.

[50] *H. Lebesgue,* Sur les intégrales singulières, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques, 1, (1909), 25–117.

[51] *N. Memić, I. Simon, G. Tephnadze,* Strong convergence of two-dimensional Vilenkin-Fourier series, Math. Nachr., 289, no. 4, (2016), 485–500.

[52] *N. Memić,* An estimate of the maximal operator of the Nörlund logarithmic means with respect to the Walsh-Paley system on the Hardy space H_p, Math. Inequal. Appl.,(to appear).

[53] *N. Memić, L. E. Persson, G. Tephnadze,* A note on the maximal operators of Vilenkin-Nörlund means with non-increasing coefficients, Stud. Sci. Math. Hung., 53, no. 4, (2016), 545-556.

[54] *C. N. Moore,* Summable series, convergence factors, Dover Publications, Inc., New York, 1966.

[55] *F. Móricz, A. Siddiqi,* Approximation by Nörlund means of Walsh-Fourier series, J. Approx. Theory, 70, no. 3, (1992), 375–389.

[56] *K. Nagy,* Approximation by Nörlund means of quadratical partial sums of double Walsh-Fourier series, Anal. Math., 36, no. 4, (2010), 299-319.

[57] *K. Nagy, G. Tephnadze,* Approximation by Walsh-Marcinkiewicz means on the Hardy space, Kyoto J. Math., 54, no. 3 (2014), 641-652.

[58] *J. Neveu,* Discrete-parameter martingales, North-Holland Mathematical Library, Vol. 10. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1975.

[59] *C. W. Onneweer,* On L_1-convergence of Walsh-Fourier series, Internat. J. Math. Math. Sci., 1, no. 1, (1978), 47-56.

[60] *C. Onneweer, D. Waterman,* Uniform convergence of Fourier series on groups. I., Mich. Math. J., 18, no. 3, (1971), 265–273.

[61] *G. Oniani,* On the divergence sets of Fourier series in systems of characters of compact Abelian groups, Mat. Zametki, 112, no. 1 (2022), 95–105, Math. Notes, 112, no. 1 (2022), 100–108.

[62] *L. E. Persson, G. Tephnadze,* A note on Vilenkin-Fejér means on the martingale Hardy space H_p, Bulletin of TICMI, 18, no. 1, (2014), 55–64.

[63] *L. E. Persson, G. Tephnadze,* A sharp boundedness result concerning some maximal operators of Vilenkin-Fejér means, Mediterr. Math. J., 13, no. 4, (2016) 1841-1853.

[64] *L.-E. Persson, F. Schipp, G. Tephnadze, F. Weisz,* An analogy of the Carleson-Hunt theorem with respect to Vilenkin systems, J. Fourier Anal. Appl., 28, 48 (2022), 1-29.

[65] *L. E. Persson, G. Tephnadze, G. Tutberidze,* On the boundedness of subsequences of Vilenkin-Fejér means on the martingale Hardy spaces, operators and matrices, 14, no. 1, (2020), 283–294.

[66] *L.-E. Persson, G. Tephnadze, P. Wall,* Maximal operators of Vilenkin-Nörlund means, J. Fourier Anal. Appl., 21, no. 1, (2015), 76-94.

[67] *L.-E. Persson, G. Tephnadze, P. Wall,* On the Nörlund logarithmic means with respect to Vilenkin system in the martingale Hardy space H_1, Acta Math. Hungar., 154, no. 2, (2018), 289-301.

[68] *L.-E. Persson, G. Tephnadze, P. Wall,* Some new (H_p, L_p) type inequalities of maximal operators of Vilenkin-Nörlund means with non-decreasing coefficients, J. Math. Inequal., 9, no. 4, (2015), 1055-1069.

[69] *L.-E. Persson, G. Tephnadze, F. Weisz,* Martingale Hardy Spaces and Summability of one-dimensional Vilenkin-Fourier Series, Birkhäuser/Springer, 2022.

[70] *F. Schipp,* Certain rearrangements of series in the Walsh system, 18, no. 2, (1975), 193–201.

[71] *F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon,* Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis, Adam Hilger, Ltd., Bristol, 1990.

[72] *A. Schneider,* On series with respect to Walsh functions with monotone coefficients, Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem, 12, (1948), 179–192.

[73] *A. Shneider,* On convergence of Fourier-Walsh series, Math. Sbornik, 34, no. 3, (1954), 441-472.

[74] *P. Simon,* Investigations with respect to the Vilenkin system, Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math., 27, (1984), 87-101.

[75] *P. Simon,* Cesàro summability with respect to two-parameter Walsh systems, Monatshefte für Mathematik, 131, no. 4, (2000), 321–334.

[76] *P. Simon, F. Weisz,* Weak inequalities for Cesàro and Riesz summability of Walsh-Fourier series, J. Approx. Theory, 151, no. 1, (2008), 1-19.

[77] *B. Smith,* Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series, Arkiv for Matematik, 9, no. 1-2, (1971), 65–90.

[78] *B. Smith,* A strong convergence theorem for $H_1(T)$, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 995, (1994), 169-173.

[79] *S. Stechkin* On the convergence and divergence of trigonometric series, Uspekhi Mat. Nauk, 6, no. 2, (1951), 148–149.

[80] *E, A. Storozenko,* Approximation of functions of the class H^p, $0 < p < 1$, Mat. Sb., (Russian), 105, no. 149, (1978), 601-621.

[81] *გიორგი ტეფნაძე,* ერთ და ორგანზომილებიან ერთპარამეტრიან მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე კერძო ჯამებისა და მარცინკევიჩ-ფეიერის საშუალოების შესახებ, სადოქტორო ნაშრომი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, DOI: 10.13140/RG.2.1.4637.5282, 2016.

[82] *G. Tephnadze,* On the Partial Sums and Marcinkiewicz and Fejér Means on the One-and Two-dimensional One-parameter Martingale Hardy Spaces, PhD thesis, (translation in English), TSU, https://doi.org/10.48550/arXiv.1902.06696, 2016.

[83] *G. Tephnadze,* The one-dimensional martingale Hardy spaces and partial sums and Fejér means with respect to Walsh system, Mem. Differ. Equ. Math. Phys., 88, (2023) 109–158.

[84] *G. Tephnadze,* Fejér means of Vilenkin-Fourier series, Studia Sci. Math. Hungar., 49, no. 1, (2012), 79-90.

[85] *G. Tephnadze,* On the maximal operators of Vilenkin-Fejér means on Hardy spaces, Math. Inequal. Appl., 16, no. 1, (2013), 301-312.

[86] *G. Tephnadze,* A note on the norm convergence by Vilenkin-Fejér means, Georgian Math. J., 21, no. 4, (2014), 511-517.

[87] *G. Tephnadze,* On the partial sums of Vilenkin-Fourier series, J. Contemp. Math. Anal., 49, no. 1, (2014), 23-32.

[88] *G. Tephnadze,* On the Vilenkin-Fourier coefficients, Georgian Math. J., 20 no. 1, (2013), 169-177.

[89] *G. Tephnadze,* On the convergence of Fejér means of Walsh-Fourier series in the space H_p, J. Contemp. Math. Anal., 51, no. 2, (2016), 51-63.

[90] *G. Tephnadze,* Martingale Hardy Spaces and Summability of the One Dimensional Vilenkin-Fourier Series, PhD thesis, Department of Engineering Sciences and Mathematics, Luleå University of Technology, Oct. 2015 (ISSN 1402-1544).

[91] *G. Tephnadze,* On the convergence of partial sums with respect to Vilenkin system on the martingale Hardy spaces, J. Contemp. Math. Anal., 53, no 5, (2018), 294–306.

[92] *G. Tephnadze,* On the partial sums of Walsh-Fourier series, Colloq. Math., 141, no. 2, (2015), 227-242.

[93] *G. Tephnadze, G. Tutberidze,* A note on The maximal operators of the Nörlund logaritmic means of Vilenkin-Fourier series, Proc. Razmadze Math. Inst., 174, no. 1, (2020), 107–112.

[94] *A. Torchinsky,* Real-Variable Methods in Harmonic Analysis, Dover Books on Mathematics, 2008.

[95] *V. Tsagareishvili, G. Tutberidze,* Some problems of convergence of general Fourier series, J. Contemp. Math. Anal., 57, no. 6, (2022), 369-379.

[96] *გიორგი თუთბერიძე,* შემოსაზღვრული ოპერატორები ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებზე, სადოქ-ტორო ნაშრომი, საქართველოს უნივერსიტეტი, 2021.

[97] *G. Tutberidze,* Bounded operators on Martingale Hardy spaces, PhD thesis, UiT The Arctic University of Norway, https://hdl.handle.net/10037/23128, 2021.

[98] *G. Tutberidze,* A note on the strong convergence of partial sums with respect to Vilenkin system, J. Contemp. Math. Anal., 54, no. 6, (2019), 319–324.

[99] *G. Tutberidze,* Modulus of continuity and boundedness of subsequences of Vilenkin-Fejér means in the martingale Hardy spaces, Georgian Math. J., 29, no. 1, (2022), 153–162.

[100] *C. Watari,* On generalized Walsh-Fourier series, Tóhoku Math. J., 10, no. 2, (1958), 211-241.

[101] *F. Weisz,* (C, α) summability of Walsh-Fourier series, Anal. Math., 27, (2001), 141-156.

[102] *F. Weisz,* Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis, Lecture Notes in Mathematics, 1568. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[103] *F. Weisz,* Hardy spaces and Cesàro means of two-dimensional Fourier series, Approximation theory and function series (Budapest, 1995), 353–367, Bolyai Soc. Math. Stud., 5, Janos Bolyai Math. Soc., Budapest, 1996.

[104] *F. Weisz,* Cesàro summability of one- and two-dimensional Walsh-Fourier series, Anal. Math. 22 no. 3, (1996), 229-242.

[105] *F. Weisz,* Weak type inequalities for the Walsh and bounded Ciesielski systems, Anal. Math., 30, no. 2, (2004), 147-160.

[106] *F. Weisz,* Summability of multi-dimensional Fourier series and Hardy spaces, Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 541, 2002.

[107] *S.H. Yano,* Cesàro summability of Walsh-Fourier series, Tohoku Math. J. 9, no. 2, (1957), 267-272.

[108] *W. S. Young,* Mean convergence of generalized Walsh-Fourier series, Trans. Amer. Math. Soc., 218, (1976), 311-320.

[109] *W. S. Young,* Almost everywhere convergence of Vilenkin-Fourier series of H^1 functions, Proc. Am. Math. Soc., 108, no. 2, (1990), 433–441.

[110] *L. Zhizhiashvili,* Integrability of majorants connected with multiple Fourier series, Bull. Acad. Sci. Georgian SSR, 125, (1987), 469–471.

[111] *A. Zygmund,* Trigonometric series, Cambridge University Press, New York, 1959.